Investigación Operativa

Programación lineal entera

Investigación Operativa

Programación lineal entera

Índice

La programación lineal entera. Introducción

La formulación de un problema lineal entero (**PLE**) coincide con la de un problema lineal, pero se exige que al menos una de las variables de decisión sea entera.

Si todas las variables del problema son enteras → Problema lineal entero puro (**PLEP**)

Si son enteras sólo algunas → Problema lineal entero mixto (**PLEM**)

Si las variables toman sólo valores {0,1}, se llaman variables binarias. Los problemas que tienen todas sus variables binarias se llaman Problemas binarios (**PB**)

¿Cómo resolver un problema lineal entero?

- Si da la casualidad de que la solución del **problema relajado** (es decir, considerando el problema como si fuera de programación lineal continua) es entera, dicha solución será la del problema entero original. En la práctica, esto no sucede casi nunca.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{lrcrl} max & 2x_1 & + & x_2 & \\ s.a: & x_1 & + & x_2 & \geq 10 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq 15 \\ & x_1 & + & 2x_2 & = 15 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, x_2 \in Z_+} \end{array}$$

Relajación $\Rightarrow$

$$\begin{array}{lrcrl} max & 2x_1 & + & x_2 & \\ s.a: & x_1 & + & x_2 & \geq 10 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq 15 \\ & x_1 & + & 2x_2 & = 15 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$

Conceptos básicos de programación lineal entera

Celda objetivo (Máx.)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$3	f.o.	5,8	21

¡¡Son enteras!!

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$B$2	x1	2,2	9	Continuar
$C$2	x2	1,4	3	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$D$5	R1)	12	$D$5>=$F$5	No vinculante	2
$D$6	R2)	15	$D$6<=$F$6	Vinculante	0
$D$7	R3)	15	$D$7=$F$7	Vinculante	0

¿Cómo resolver un problema lineal entero?

- Una primera aproximación razonable sería considerar la solución óptima que se obtuviese del problema relajado, y posteriormente redondear la solución obtenida (**método de redondeo**). Sin embargo este método, aunque sencillo, presenta dos dificultades serias:

  1. Que todas las soluciones obtenidas por redondeo sean no factibles.
  2. Que la solución esté alejada del óptimo aunque sea factible.

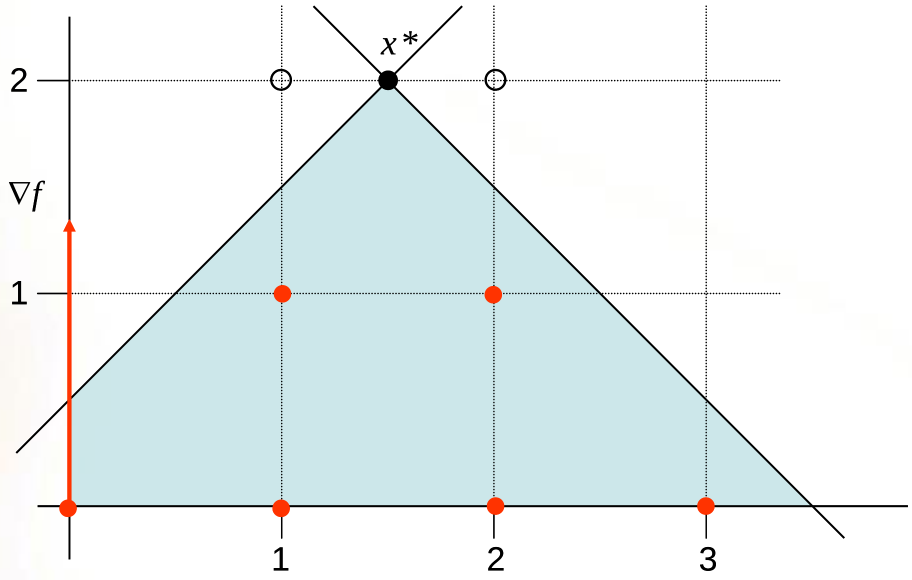
EJEMPLO:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \\ s.a: \quad & -x_1 + x_2 \le \frac{1}{2} \\ & x_1 + x_2 \le \frac{7}{2} \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Relajación $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \\ s.a: \quad & -x_1 + x_2 \le \frac{1}{2} \\ & x_1 + x_2 \le \frac{7}{2} \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Conceptos básicos de programación lineal entera



Solución problema relajado:

$$x^* = \left(3/2,\, 2\right)$$

Redondeo

$$\left.\begin{array}{c}(1,2)\\(2,2)\end{array}\right\}\ \text{No factibles}$$

➔ **Todas las soluciones obtenidas por redondeo son infactibles**

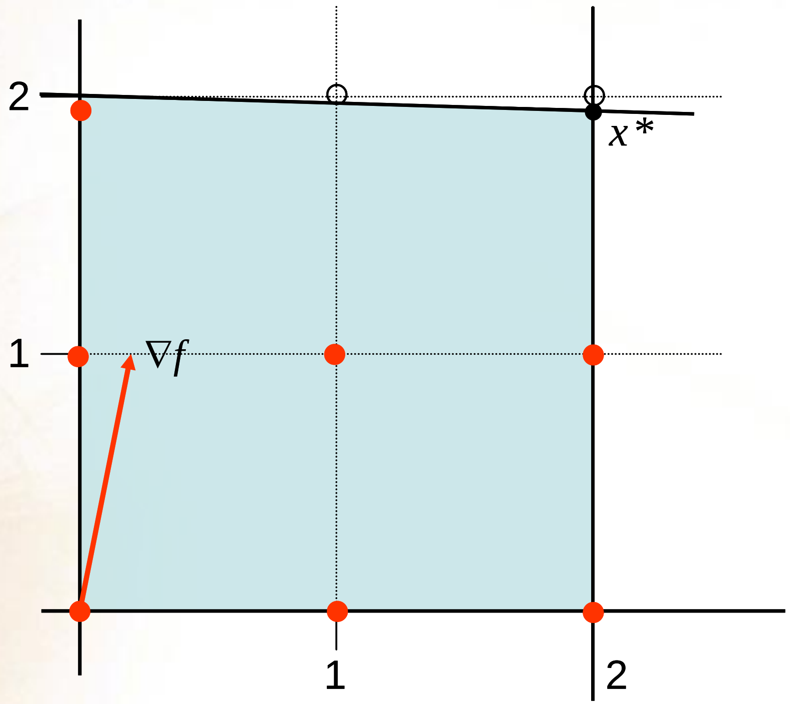
EJEMPLO:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 5x_2 \\ s.a: & x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & x_1 \qquad\quad\;\; \leq 2 \\ & \;\; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

Relajación $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 5x_2 \\ s.a: & x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & x_1 \qquad\quad\;\; \leq 2 \\ & \;\; x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Conceptos básicos de programación lineal entera



Solución problema relajado:

$$x^* = \left(2, 9/5\right)$$

Redondeo

$$\begin{cases} (2,2) & \text{No factible} \\ (2,1) & \text{factible, z=7} \end{cases}$$

El óptimo del PLE es $x^* = \left(0,2\right)$ con $z^* = 10$, que está lejos de (2, 1)

➔ La solución obtenida por redondeo está alejada del óptimo, aunque es factible.

¿Cómo resolver un problema lineal entero?

- Otra alternativa son los **métodos de enumeración**, dentro de los cuales distinguiremos dos clases:

Métodos de enumeración explícita

Métodos de enumeración implícita

Los **métodos de enumeración explícita** consisten en enumerar todas las soluciones factibles del problema y evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de ellos. Este método puede ser inabordable en un tiempo razonable, quedando básicamente relegado a problemas de dos variables, u otros con conjuntos factibles pequeños.

Los **métodos de enumeración implícita** consisten en explorar implícitamente todos los puntos factibles sin necesidad de llegar a conocer todos los puntos factibles.

Método de ramificación y acotación

El **método de ramificación y acotación (Branch & Bound)** es un método de enumeración implícita que basa la búsqueda en tests apropiados para considerar sólo una pequeña porción de las soluciones enteras factibles que, implícitamente, representen a todas las soluciones enteras.

Consiste en tres elementos:

- Utilizar **problemas lineales relajados** para poder resolverlos con las técnicas básicas de programación lineal.

- **Ramificación** de los problemas en subproblemas con regiones factibles disjuntas cuya unión contenga todos los puntos factibles.

- **Acotación** para dejar de ramificar aquellos subproblemas que ya no ofrezcan posibilidades para encontrar la solución óptima.

Algoritmo de ramificación y acotación de Dakin:

PASO 1: Se resuelve el problema relajado P0. Si la solución es factible para el problema original, ésta es la solución óptima (FIN). En caso contrario ir al PASO 2.

PASO 2: De entre las variables fraccionarias que debían ser enteras, elegimos aquella con mayor parte fraccionaria, en caso de empate elegimos la que tenga menor subíndice. Sea x_i dicha variable con valor óptimo x_i^* en el problema relajado. Entonces creamos los dos siguientes subproblemas relajados:

P1: Problema original relajado + la restricción $x_i \leq [x_i^*]$
P2: Problema original relajado + la restricción $x_i \geq [x_i^*] + 1$

(es inmediato que la solución óptima que buscamos está en uno de los dos conjuntos factibles de los dos problemas anteriores)

Método de ramificación y acotación

Cuando resolvemos los problemas anteriores podemos encontrarnos con tres situaciones distintas:

I. Tanto P1 como P2 tienen **solución factible** para el problema original. Entonces, **la mejor de las dos es la solución óptima** del problema (FIN).

II. P1 tiene **solución factible** para el problema original y P2 tiene **solución no factible** para el problema original (el caso contrario es análogo). Entonces el valor de la función objetivo en el problema P1 es una **cota inferior del valor de la solución óptima** del problema original (en el caso de que estemos maximizando, si estuviéramos minimizando sería una cota superior).
Dos posibilidades: si el valor de la función objetivo para P1 es mayor que el valor para P2, entonces la solución hallada en P1 es óptima para el problema original (FIN). En caso contrario, procedemos a ramificar P2 tal y como hacíamos con anterioridad.

III. Ni P1 ni P2 tienen solución factible para el problema original. Entonces, procedemos a ramificar en primer lugar el que tiene **mejor valor óptimo**.

Método de ramificación y acotación

La siguiente fase (**acotación**) será definir los criterios para dejar de ramificar a través de un subproblema dado, es decir, ¿cuándo cerramos un subproblema, o en otras palabras, cuándo dejamos de ramificarlo?

- La solución del subproblema correspondiente es factible para el problema original.

- El subproblema es infactible en sí mismo.

- El valor óptimo del subproblema está acotado superiormente si estamos maximizando (inferiormente si estamos minimizando) por el mejor valor óptimo con solución factible para el problema original hallada hasta el momento.

El proceso termina cuando todos los subproblemas susceptibles de ser ramificados están cerrados por alguno de los criterios anteriores. La mejor solución factible para el problema original hallada hasta ese momento es la solución óptima buscada.

EJEMPLO:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & 21x_1 + 11x_2 \\ s.a: & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \max & 21x_1 + 11x_2 \\ s.a: & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Problema Original **Problema Relajado**

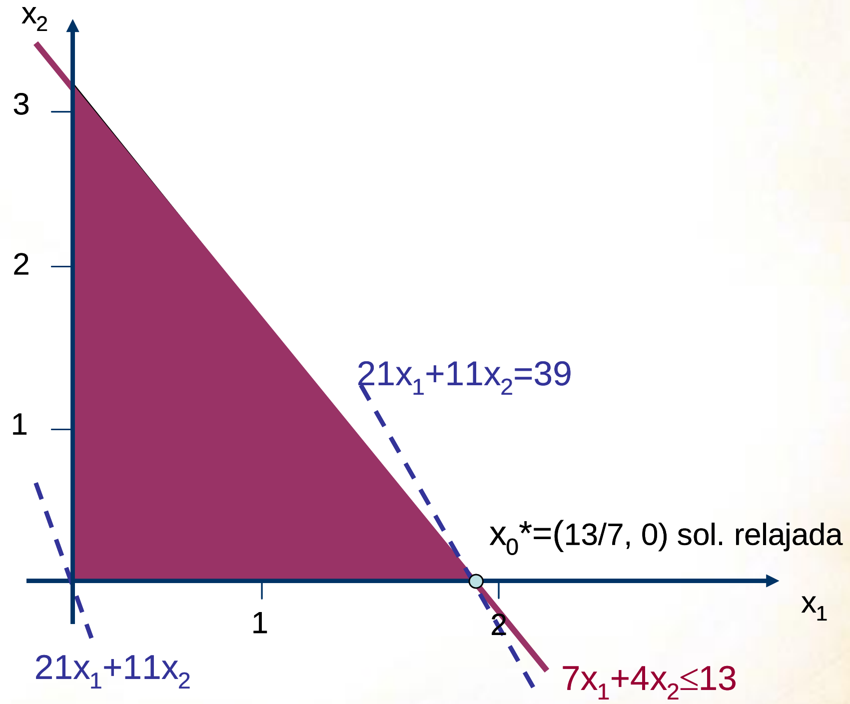
Método de ramificación y acotación

EJEMPLO:

EJEMPLO:

P_0

$$\left.\begin{array}{ll} \max & 21x_1 + 11x_2 \\ s.a: & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

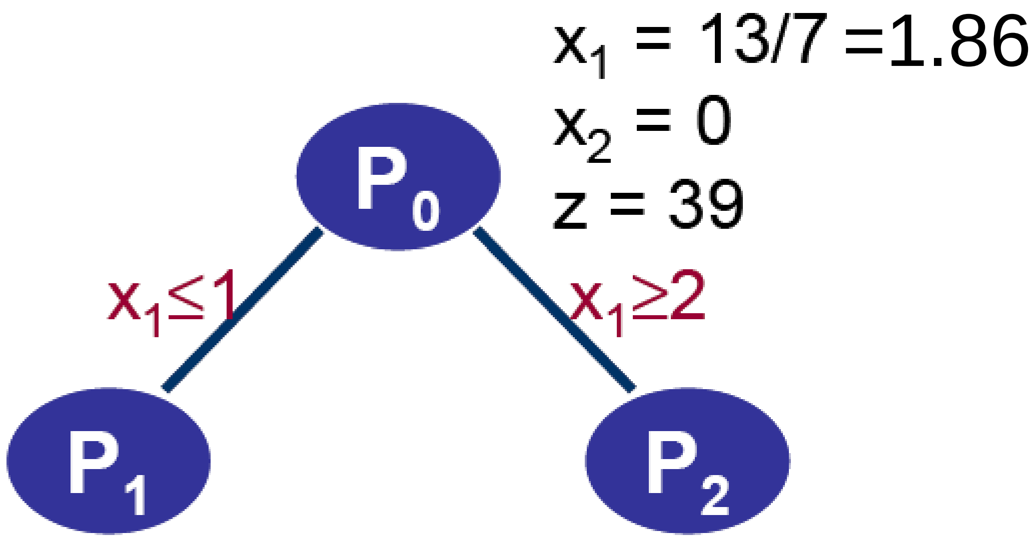


EJEMPLO:

P_0

$x_1 = 13/7 = 1.86$
$x_2 = 0$
$z = 39$

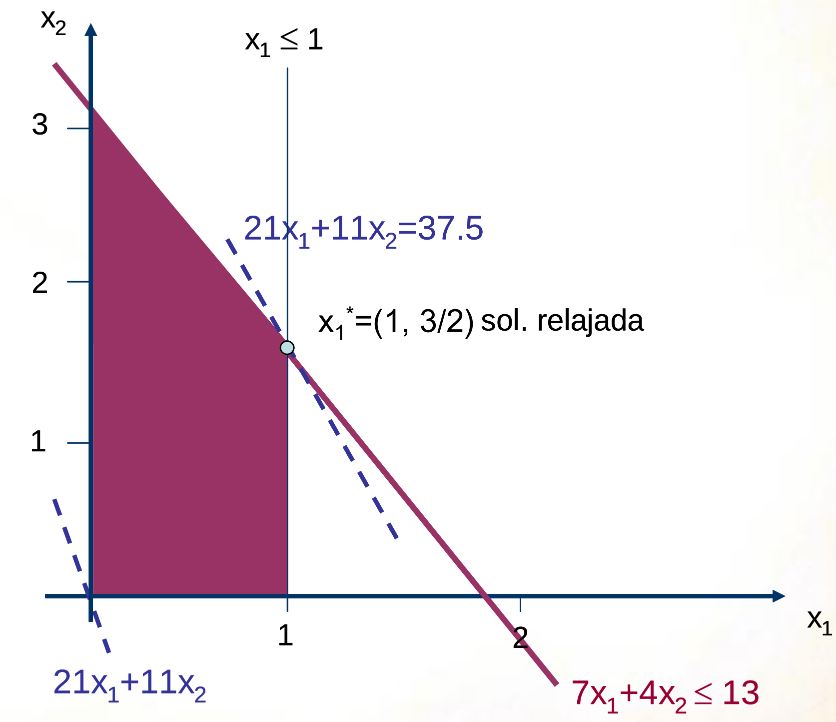
EJEMPLO:



EJEMPLO:

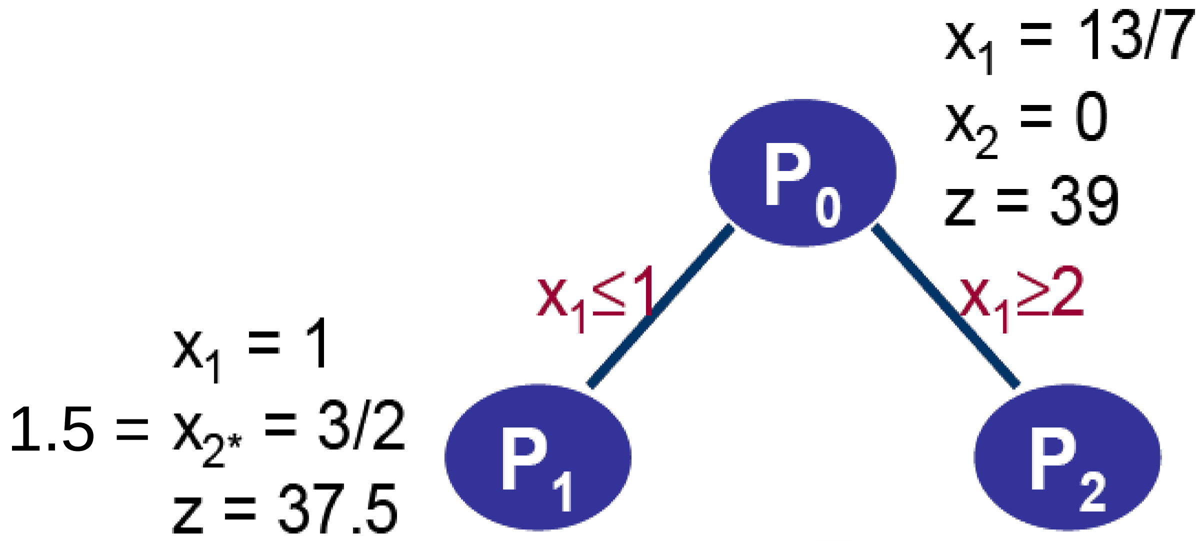
P_1

$$\left.\begin{array}{ll} \max & 21x_1 + 11x_2 \\ s.a: & 7x_1 + 4x_2 \le 13 \\ & x_1 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$



Método de ramificación y acotación

EJEMPLO:

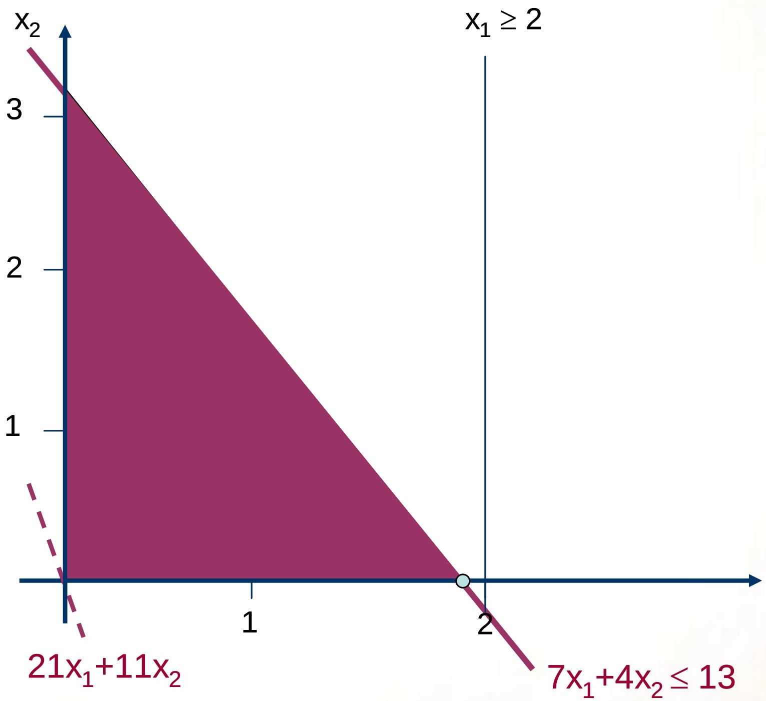


EJEMPLO:

P_2

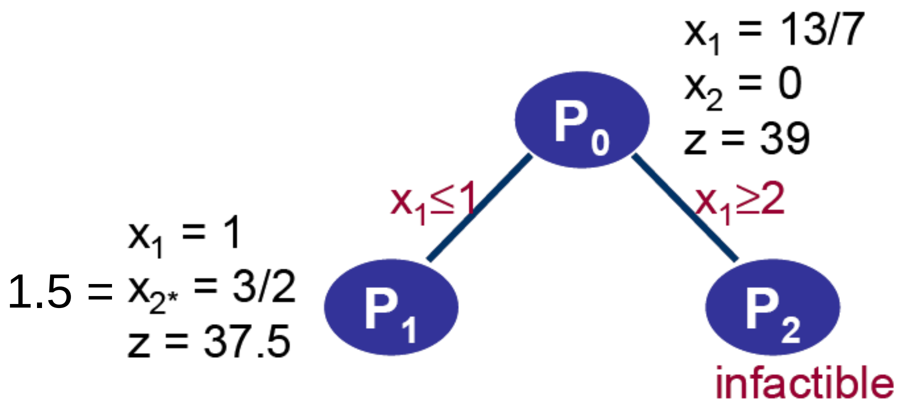
$$\left.\begin{array}{ll} \max & 21x_1 + 11x_2 \\ s.a: & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

¡Infactible!



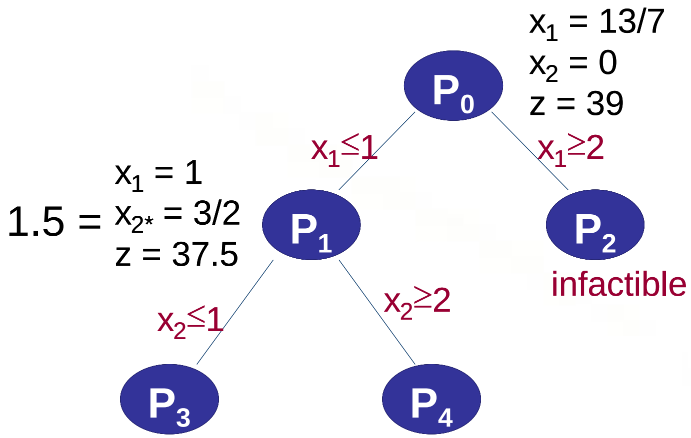
Método de ramificación y acotación

EJEMPLO:



Método de ramificación y acotación

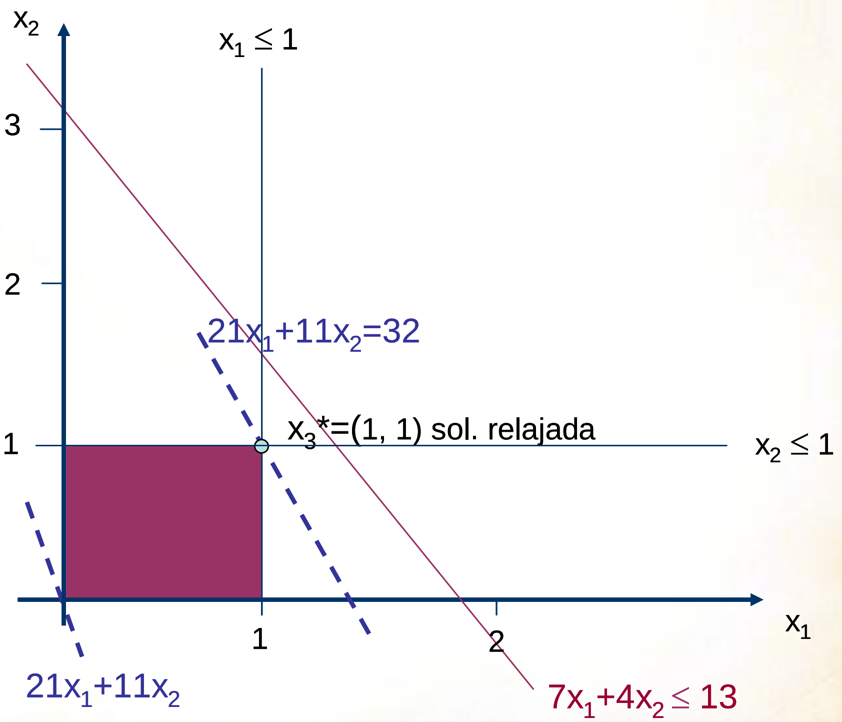
EJEMPLO:



EJEMPLO:

P_3

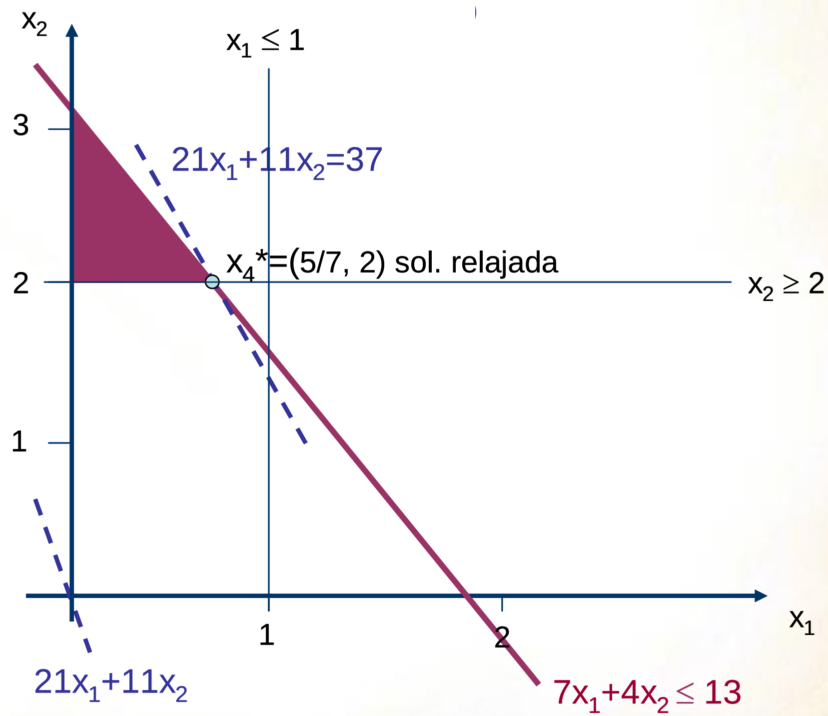
$$\left.\begin{array}{ll} \max & 21x_1 + 11x_2 \\ s.a: & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$



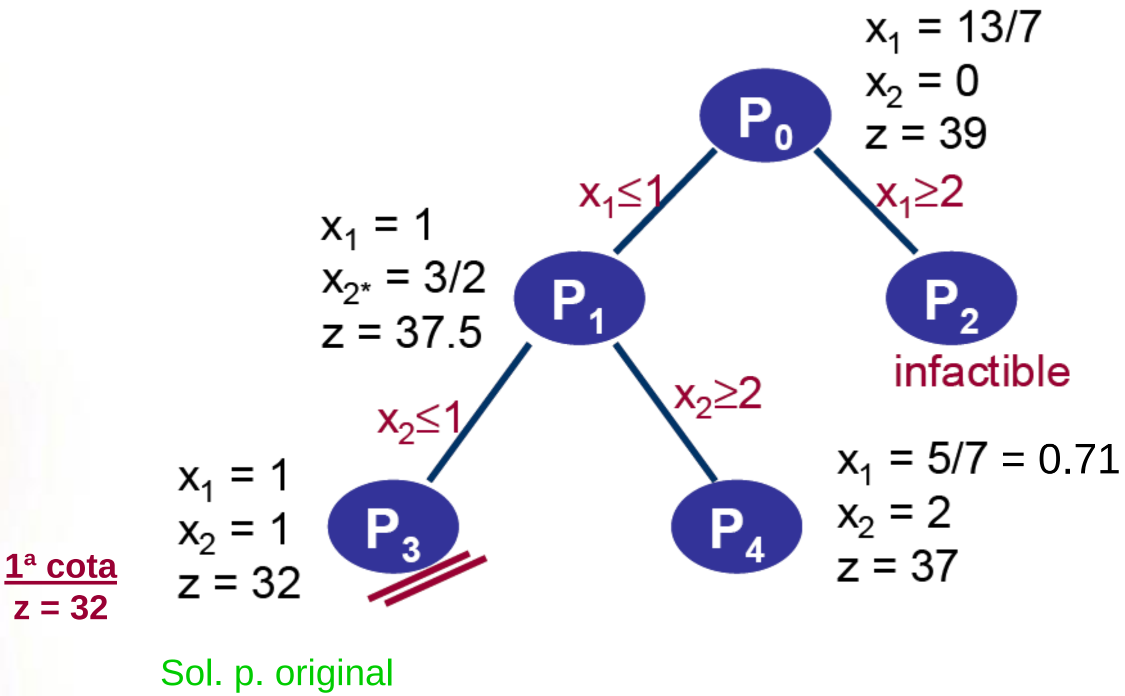
EJEMPLO:

P_4

$$\left.\begin{array}{ll} \max & 21x_1 + 11x_2 \\ s.a: & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

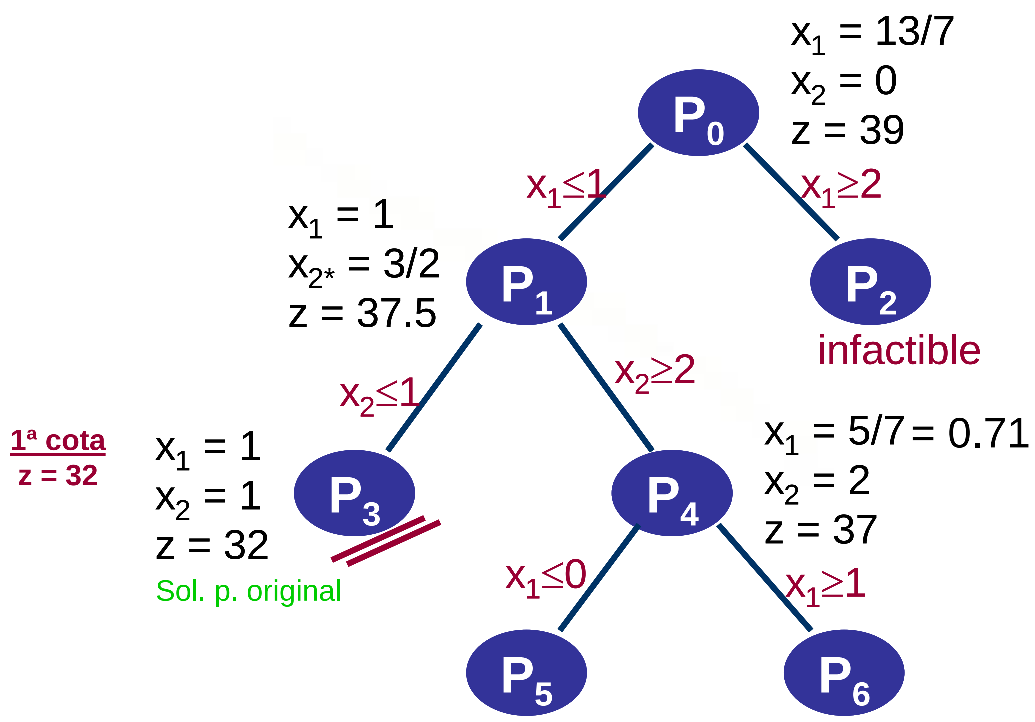


EJEMPLO:



$x_1 = 13/7$
$x_2 = 0$
$z = 39$
P_0
$x_1 \leq 1$
$x_1 \geq 2$
$x_1 = 1$
$x_{2*} = 3/2$
$z = 37.5$
P_1
P_2
infactible
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$x_1 = 5/7 = 0.71$
$x_2 = 2$
$z = 37$
$x_1 = 1$
$x_2 = 1$
$z = 32$
P_3
P_4
1ª cota
z = 32
Sol. p. original

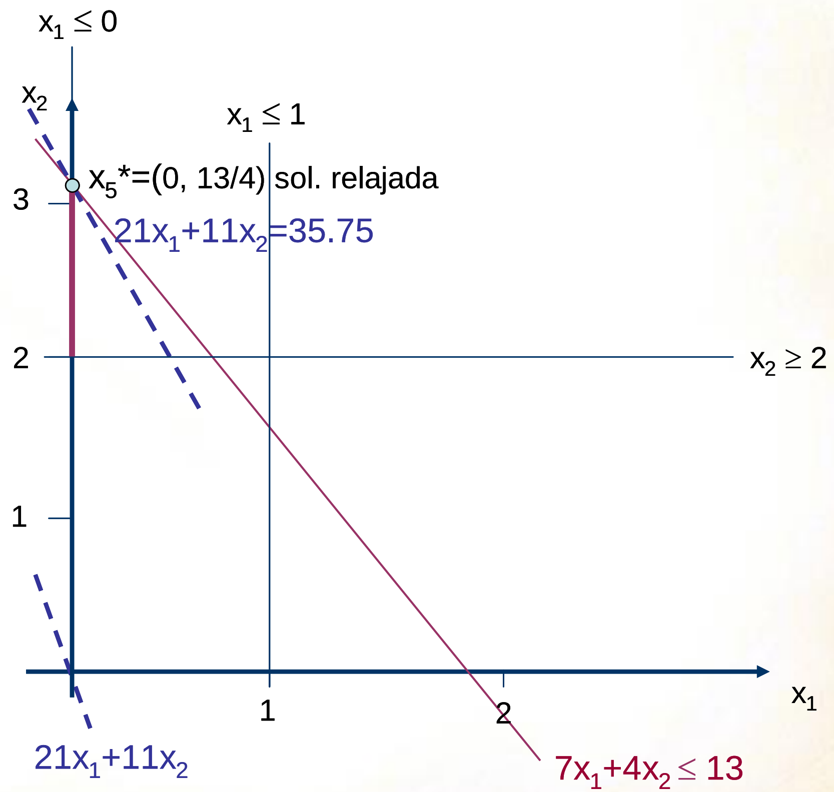
EJEMPLO:


$x_1 = 13/7$
$x_2 = 0$
$z = 39$
P_0
$x_1 \leq 1$
$x_1 \geq 2$
$x_1 = 1$
$x_{2*} = 3/2$
$z = 37.5$
P_1
P_2
infactible
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
1ª cota
z = 32
$x_1 = 1$
$x_2 = 1$
$z = 32$
Sol. p. original
P_3
P_4
$x_1 = 5/7 = 0.71$
$x_2 = 2$
$z = 37$
$x_1 \leq 0$
$x_1 \geq 1$
P_5
P_6

EJEMPLO:

P_5

$$\left.\begin{array}{ll} \max & 21x_1 + 11x_2 \\ s.a: & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

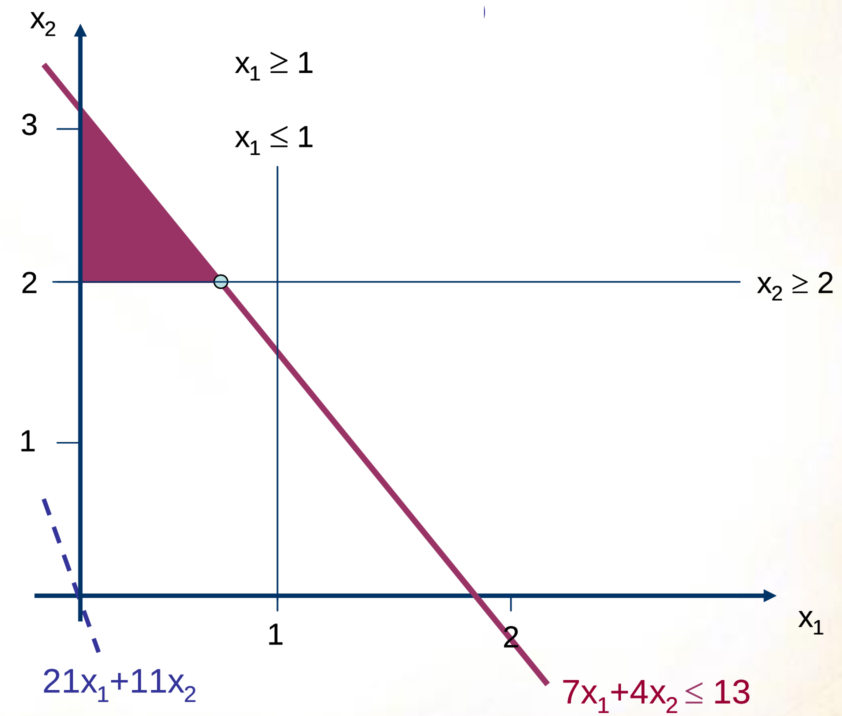


EJEMPLO:

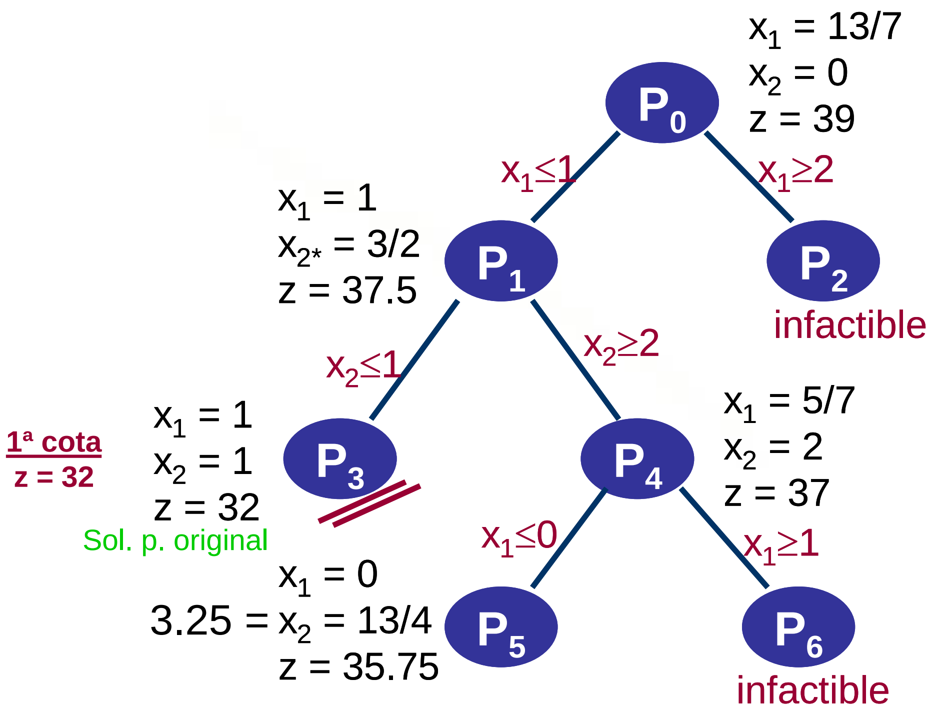
P$_6$

$$\begin{aligned} \max \quad & 21x_1 + 11x_2 \\ s.a: \quad & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

¡Infactible!



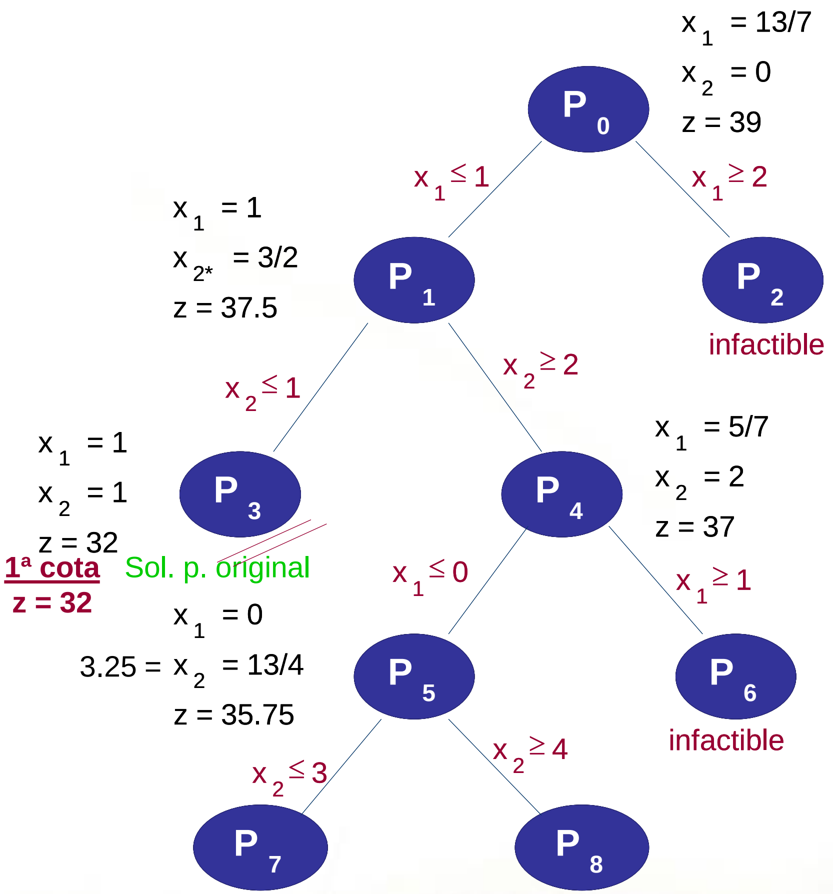
EJEMPLO:



P0
x1 = 13/7
x2 = 0
z = 39
x1≤1
x1≥2
P1
x1 = 1
x2* = 3/2
z = 37.5
P2
infactible
x2≤1
x2≥2
1ª cota
z = 32
x1 = 1
x2 = 1
z = 32
P3
Sol. p. original
P4
x1 = 5/7
x2 = 2
z = 37
x1≤0
x1≥1
x1 = 0
3.25 = x2 = 13/4
z = 35.75
P5
P6
infactible

Método de ramificación y acotación

EJEMPLO:

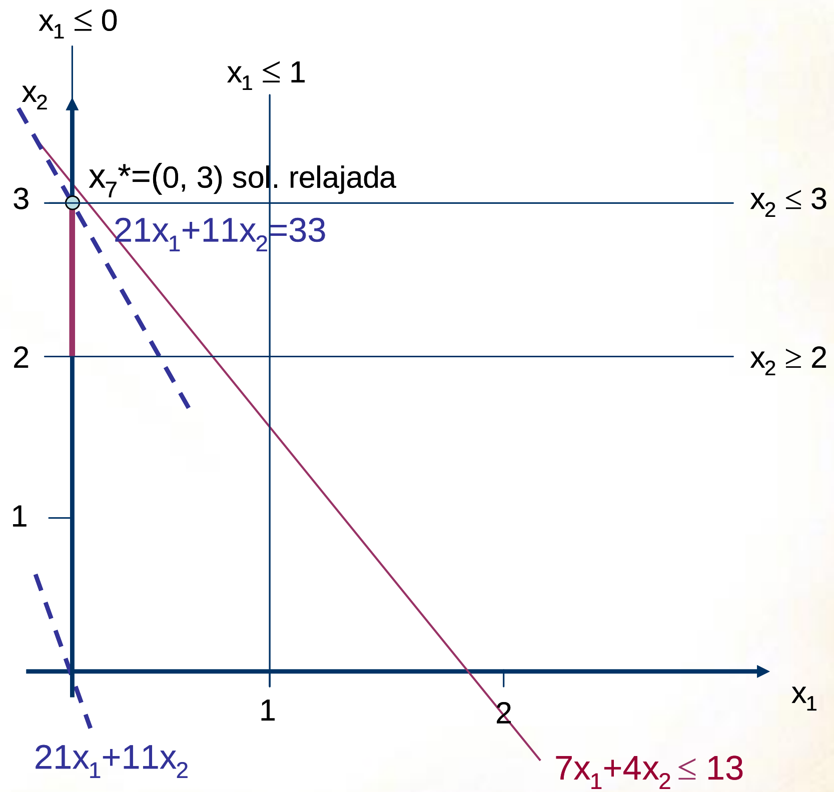


Método de ramificación y acotación

EJEMPLO:

P_7

$$\left.\begin{array}{ll} \max & 21x_1 + 11x_2 \\ s.a: & 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

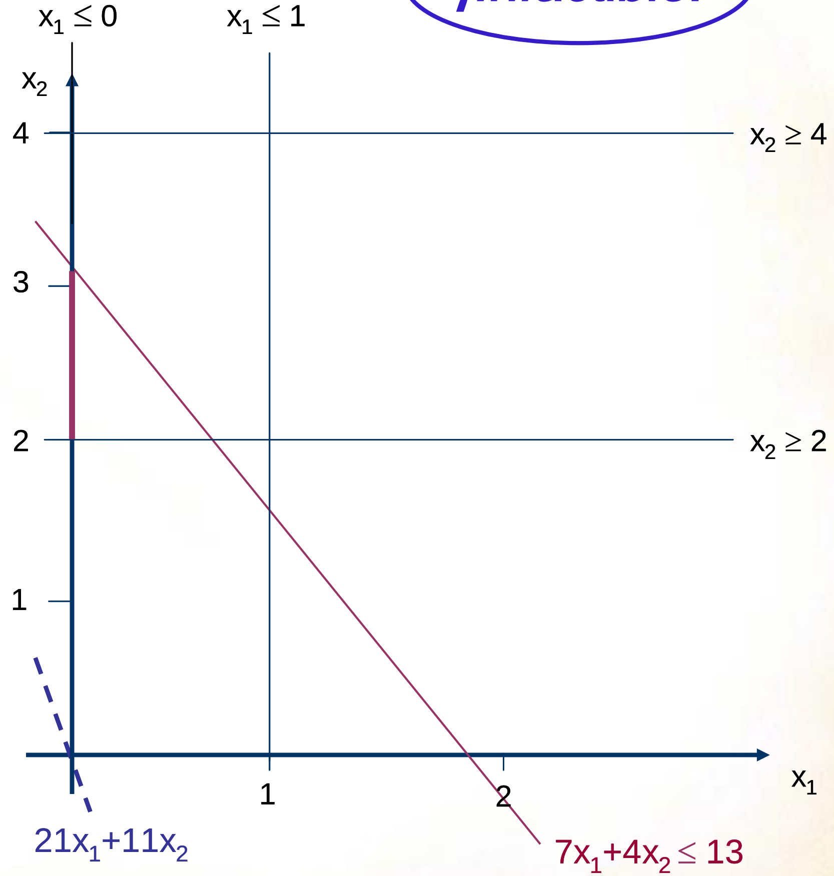


EJEMPLO:

P_8

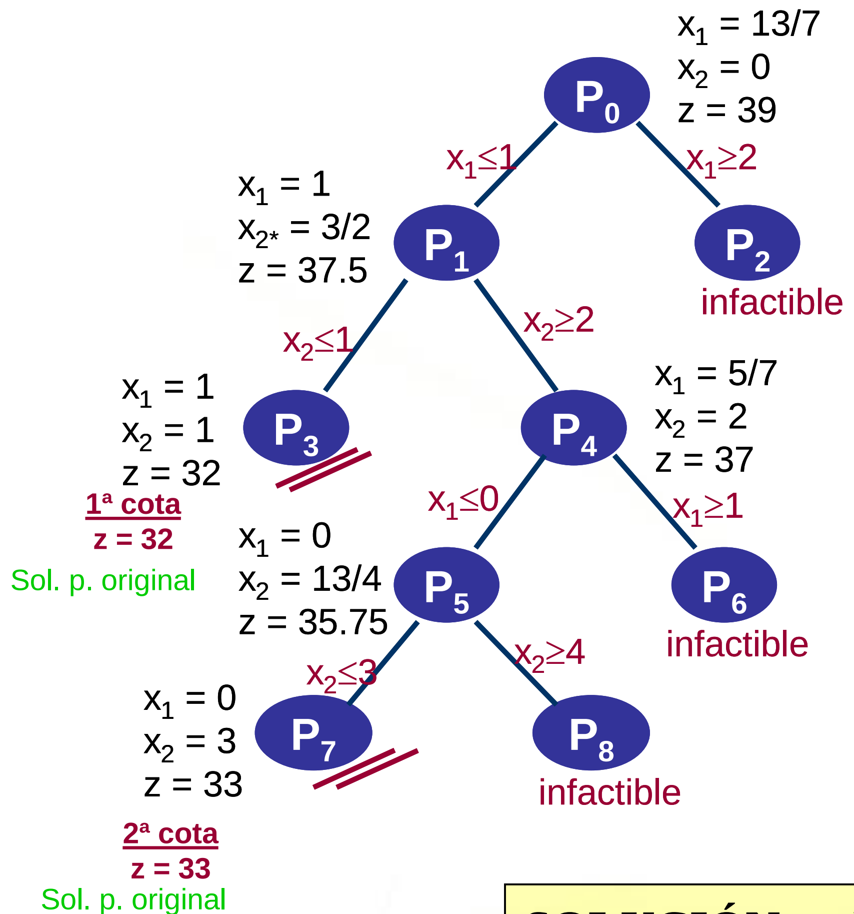
$$\left.\begin{array}{ll} \max & 21x_1 + 11x_2 \\ s.a: & 7x_1 + 4x_2 \le 13 \\ & x_1 \le 1 \\ & x_2 \ge 2 \\ & x_1 \le 0 \\ & x_2 \ge 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

¡Infactible!



Método de ramificación y acotación

EJEMPLO:



SOLUCIÓN: $x^*=(0, 3)$ $z^*=33$

EJEMPLO:

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ s.a: & 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

Problema Original

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ s.a: & 3x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

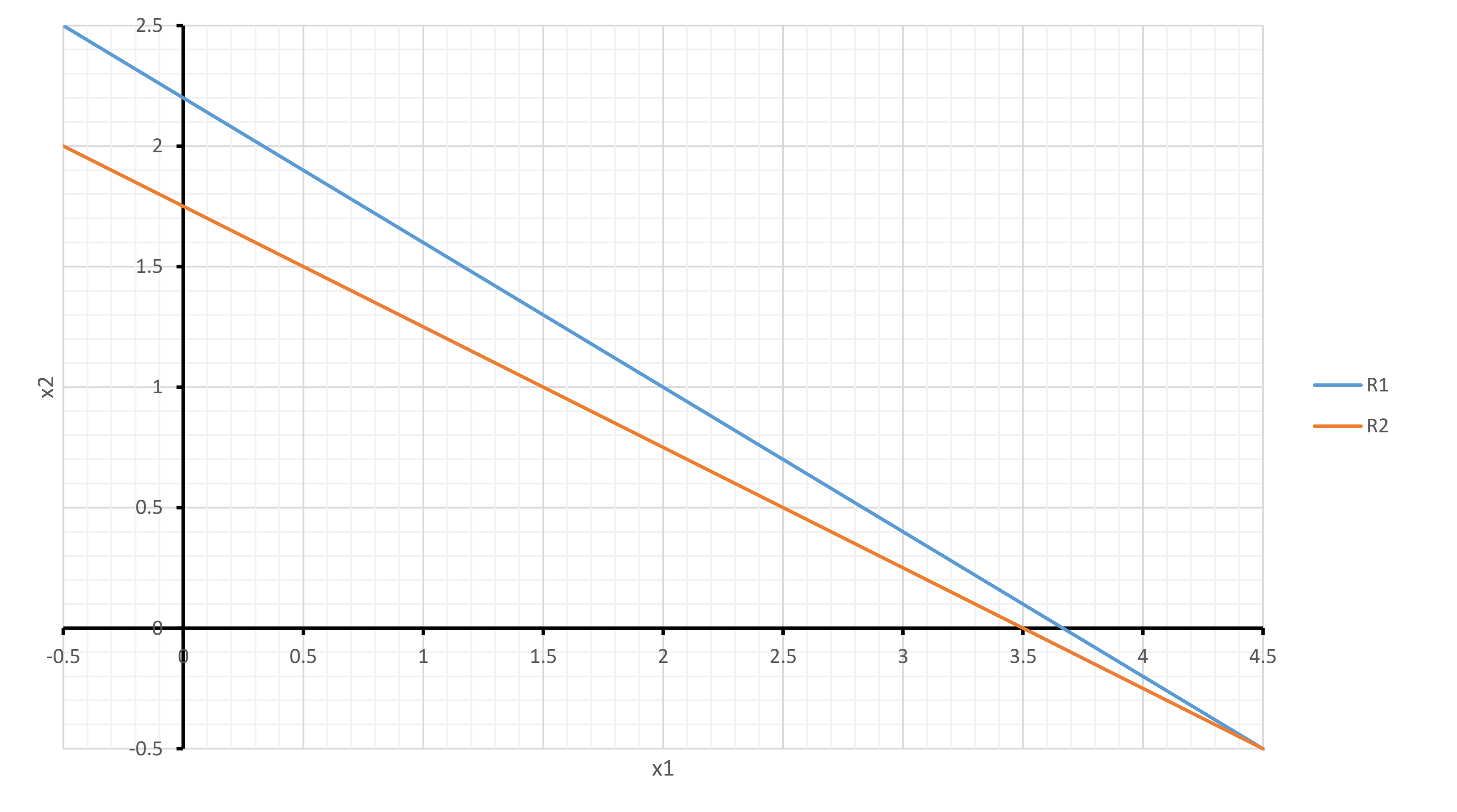
Problema Relajado

Método de ramificación y acotación

P_0

Método de ramificación y acotación

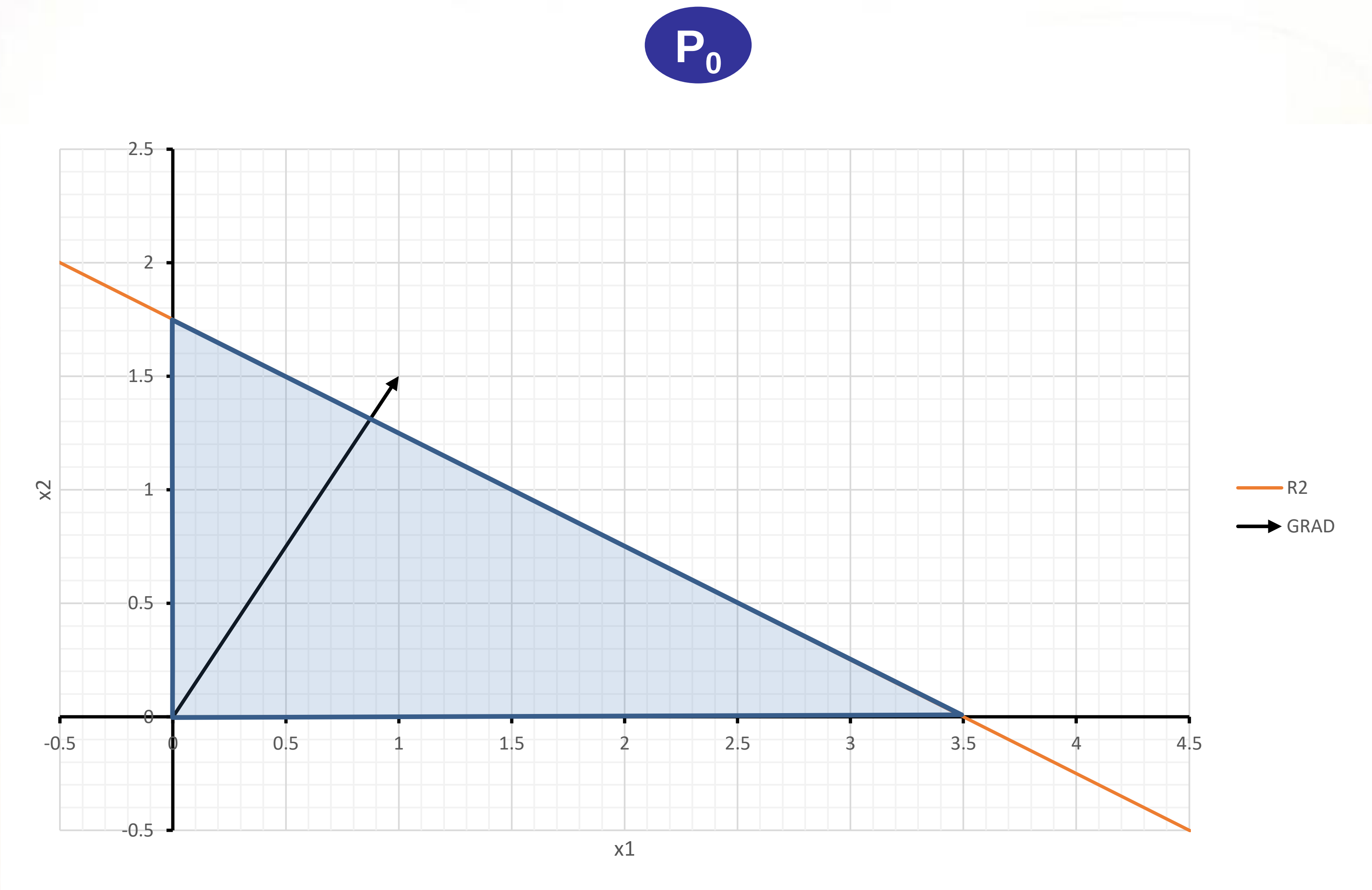
P0



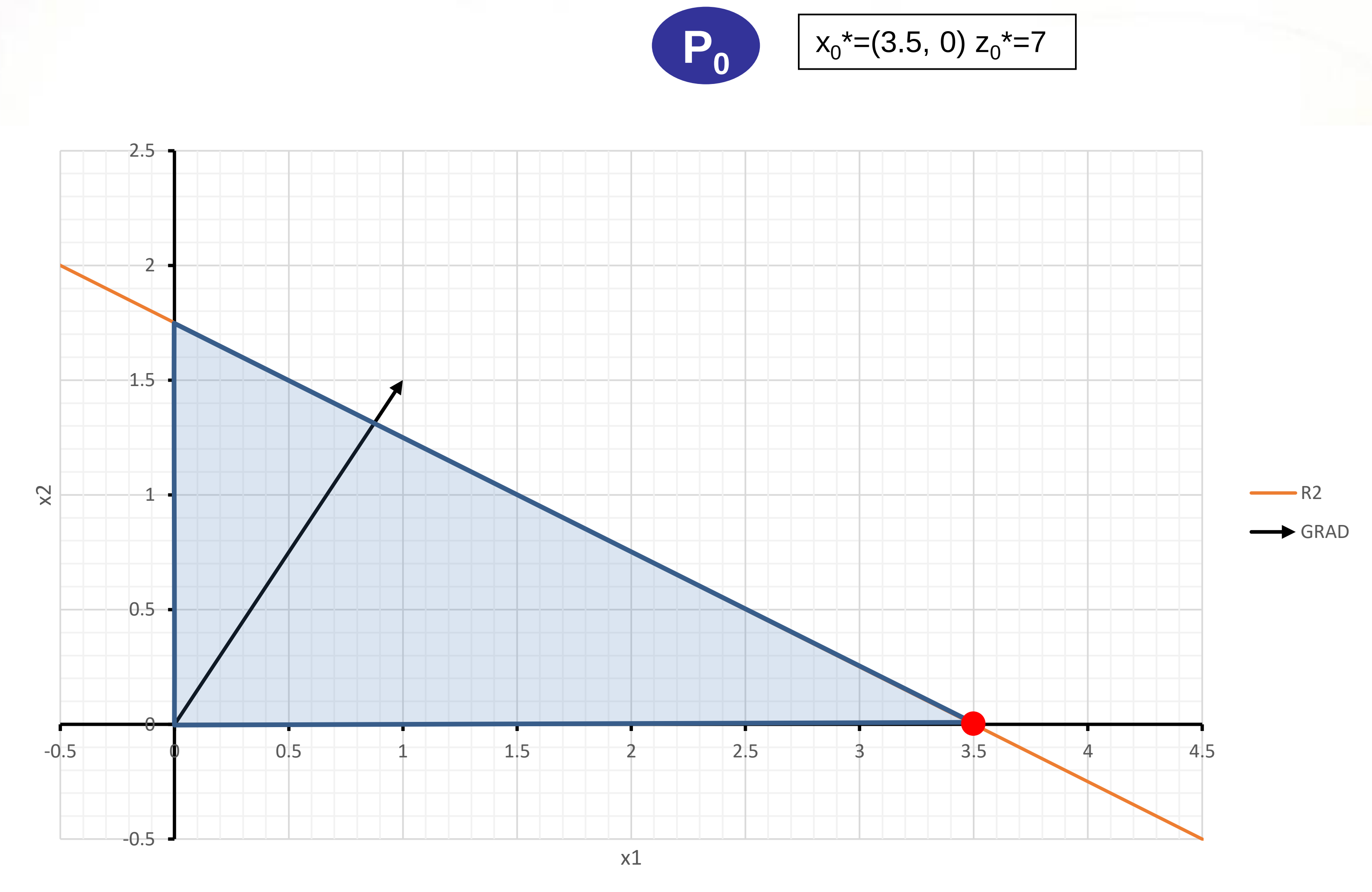
Método de ramificación y acotación

P0

Método de ramificación y acotación



Método de ramificación y acotación

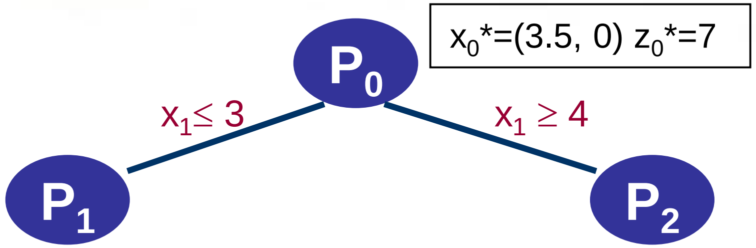


Método de ramificación y acotación

P_0

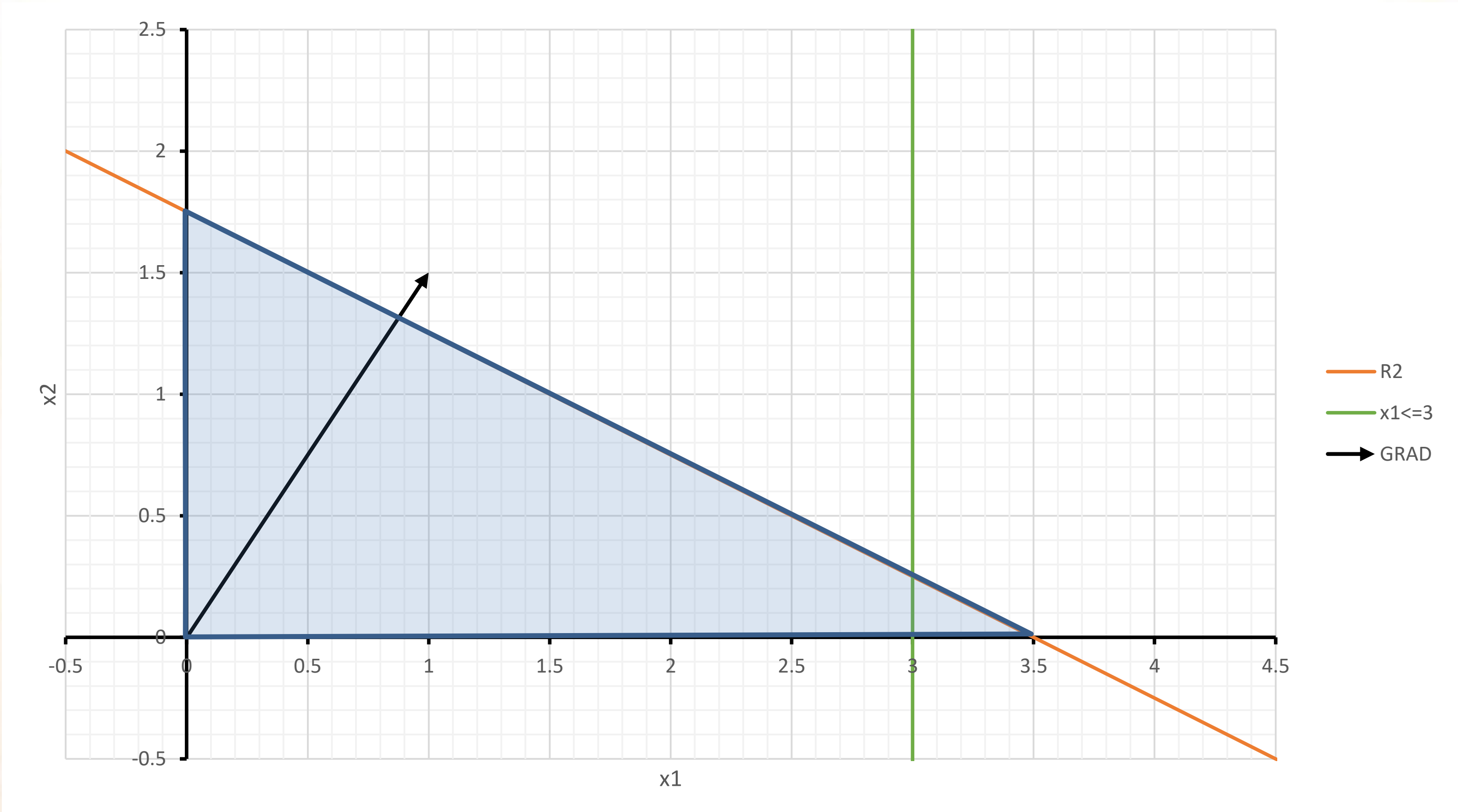
$x_0^*=(3.5,\ 0)\ z_0^*=7$

Método de ramificación y acotación



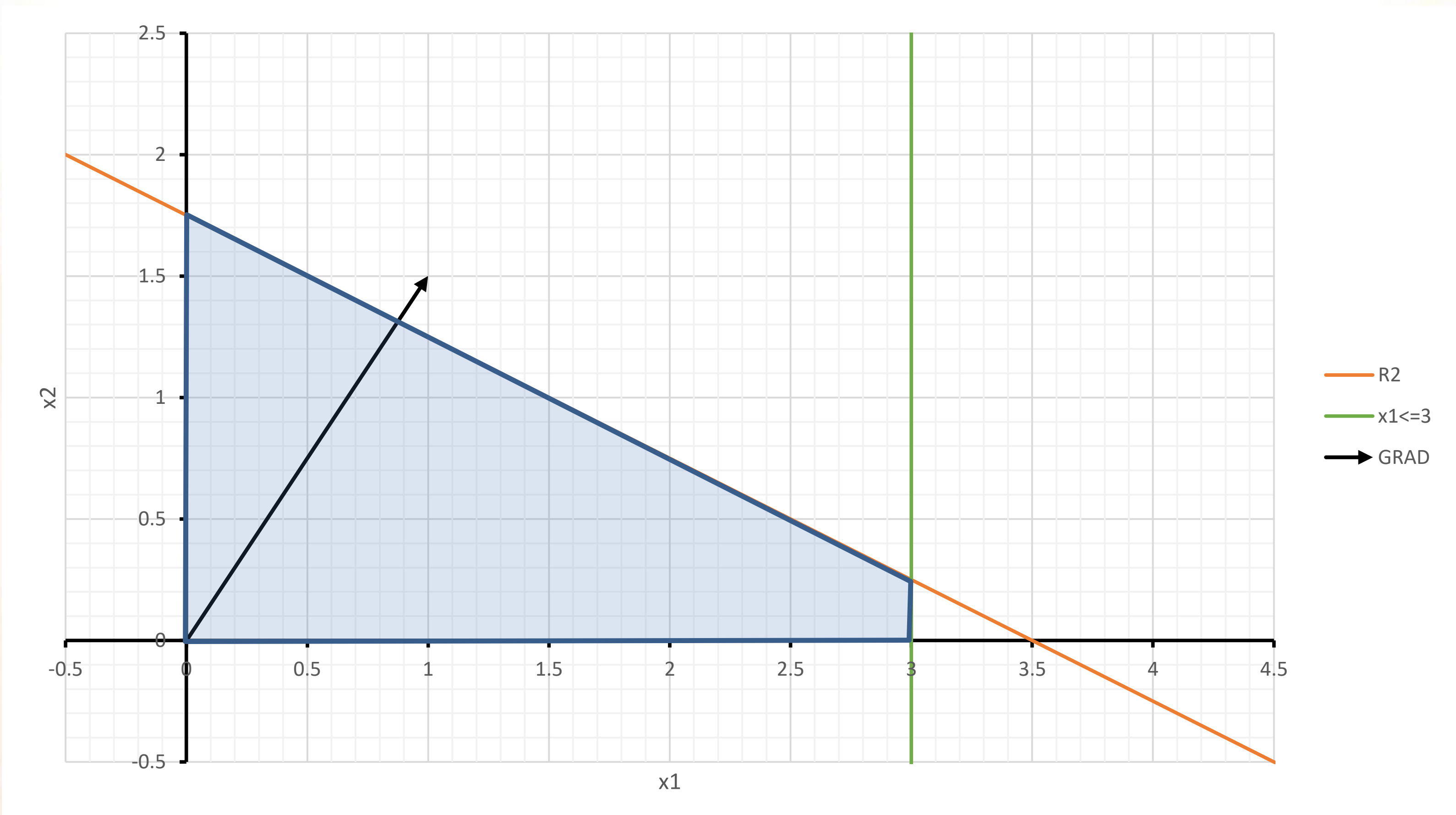
Método de ramificación y acotación

$$P_1 = P_0 + \{ x_1 \leq 3 \}$$



Método de ramificación y acotación

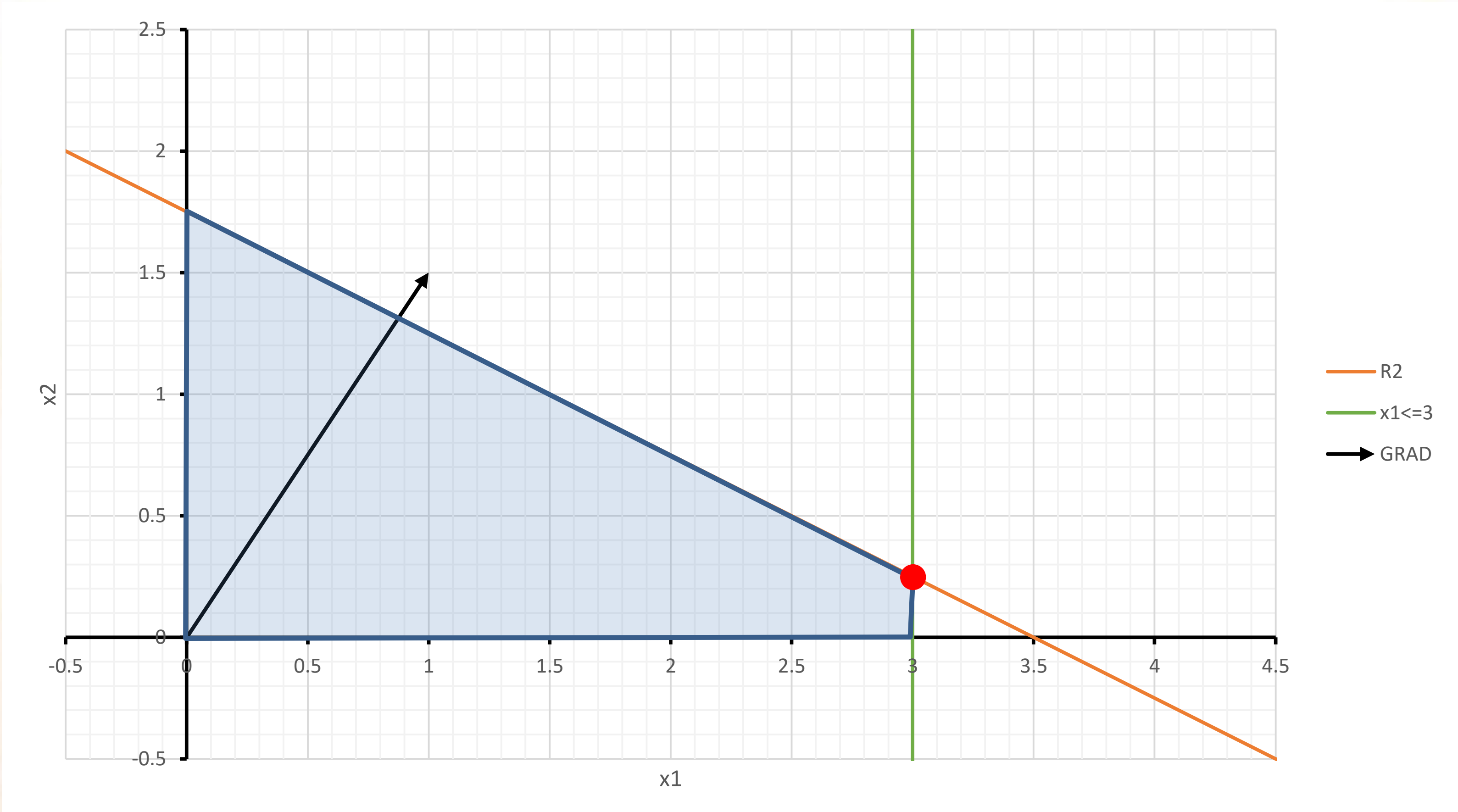
P1



Método de ramificación y acotación

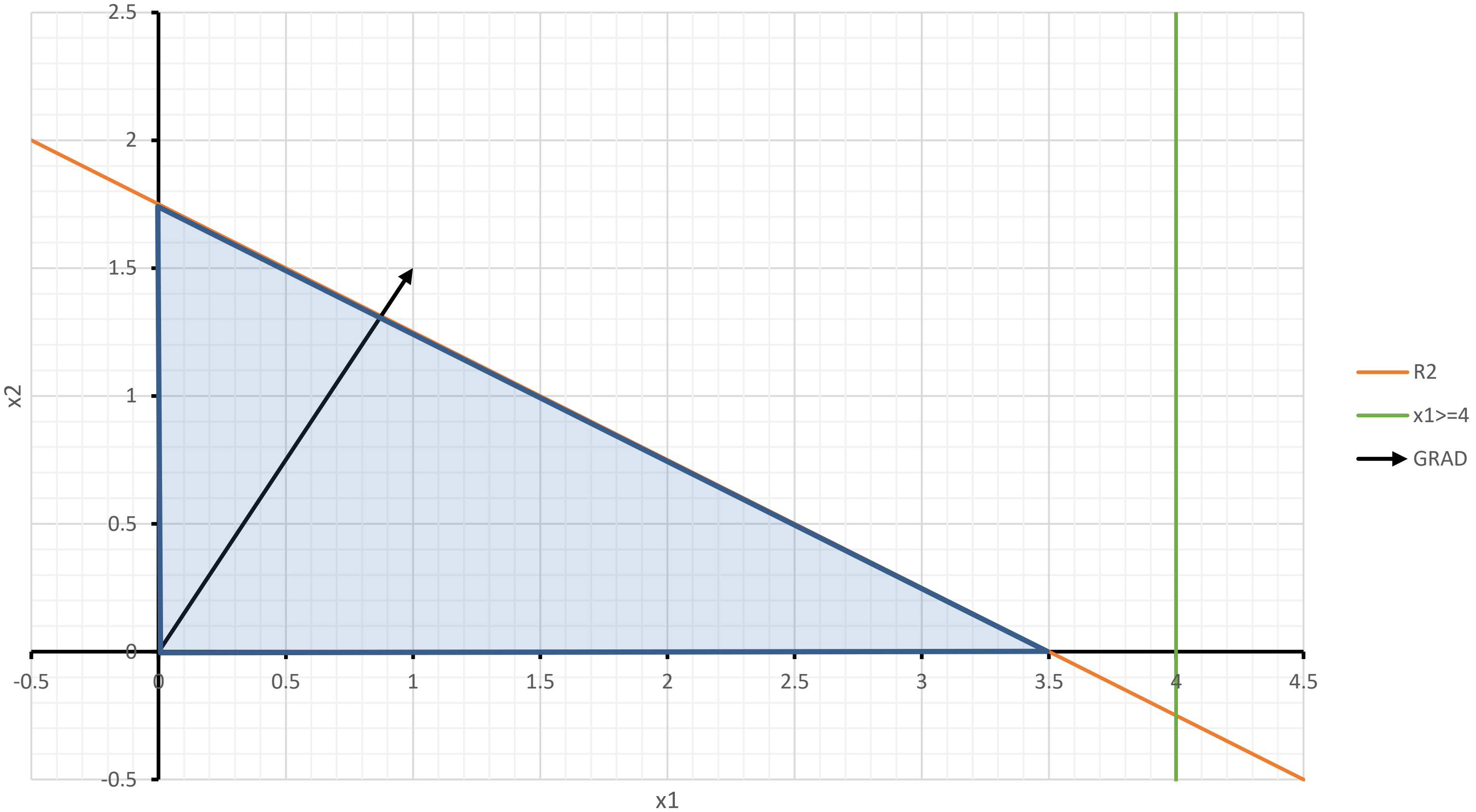
P1

$x_1^*=(3,\ 0.25)\quad z_1^*=6.75$



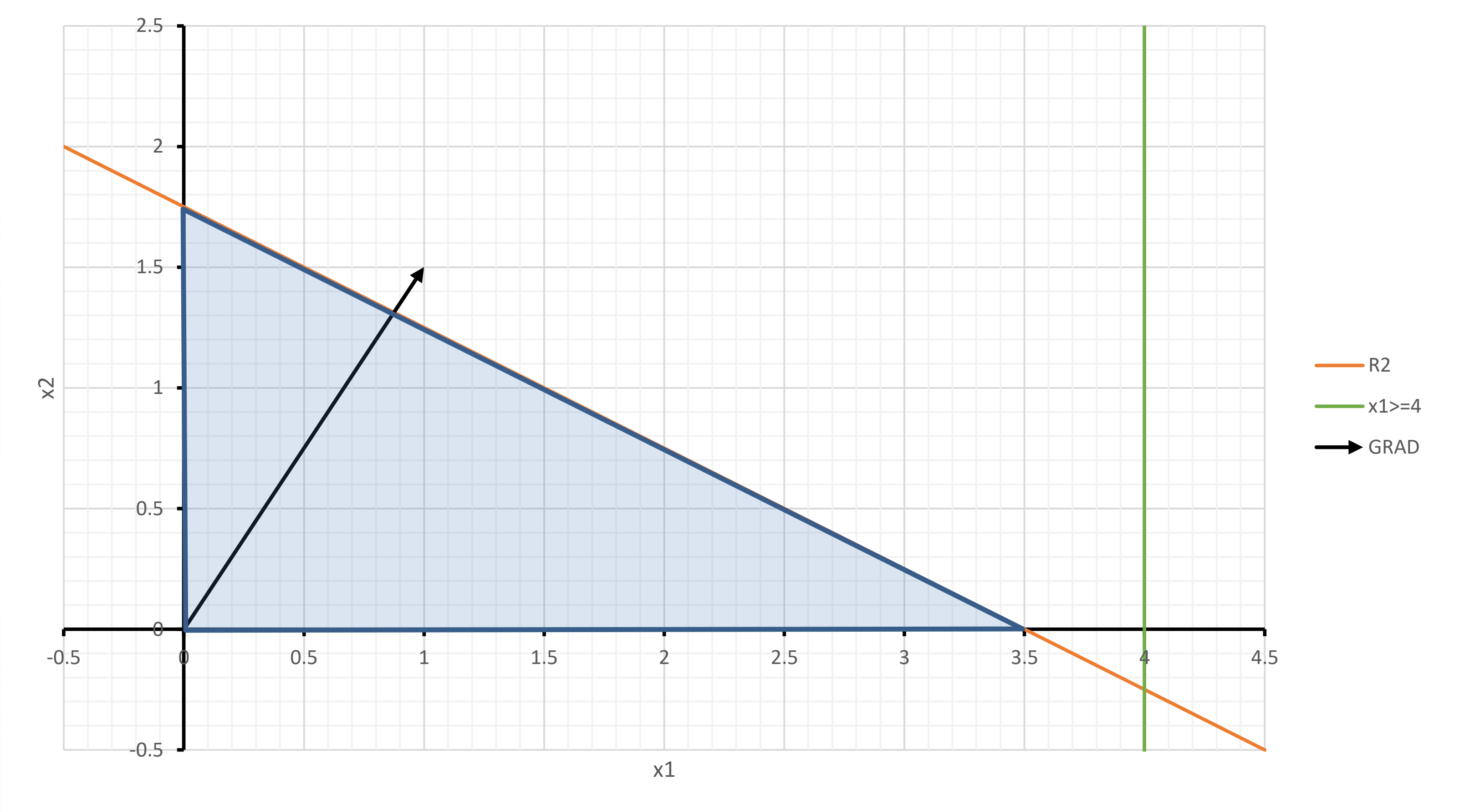
Método de ramificación y acotación

$P_2 = P_0 + \{ x_1 \geq 4 \}$

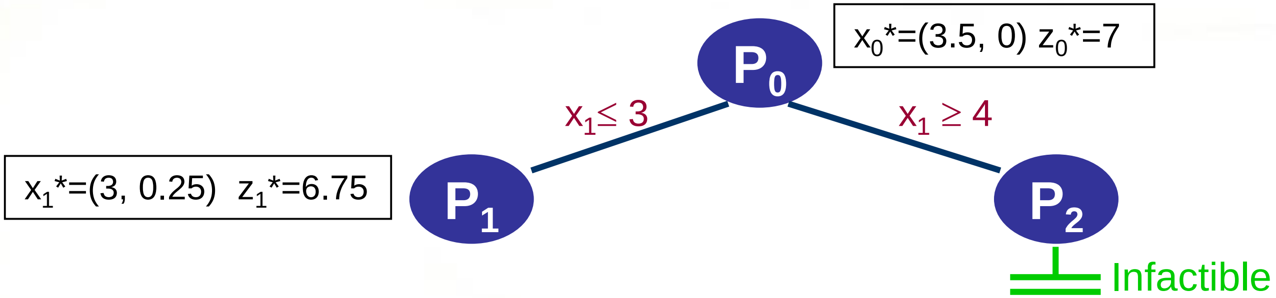


Método de ramificación y acotación

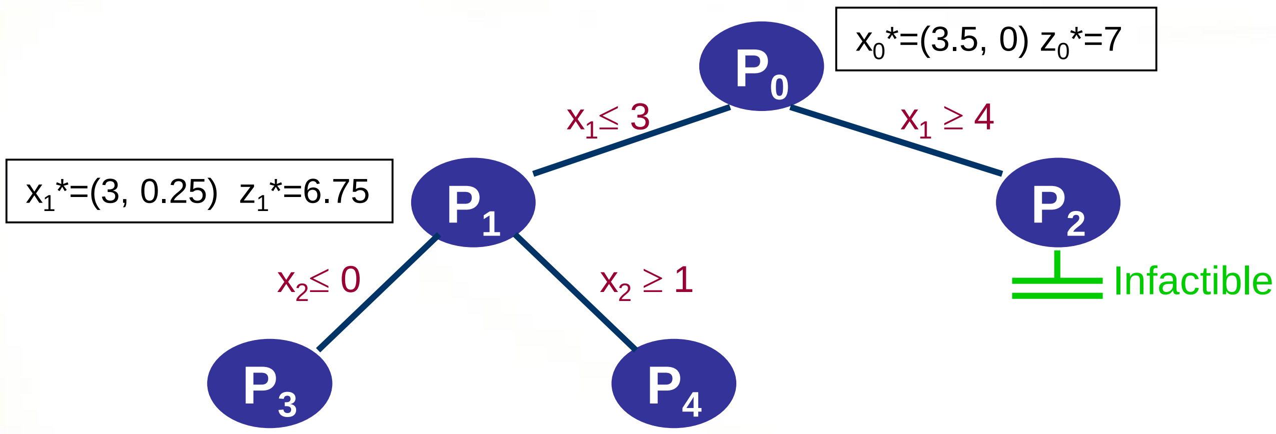
P_2 Infactible



Método de ramificación y acotación

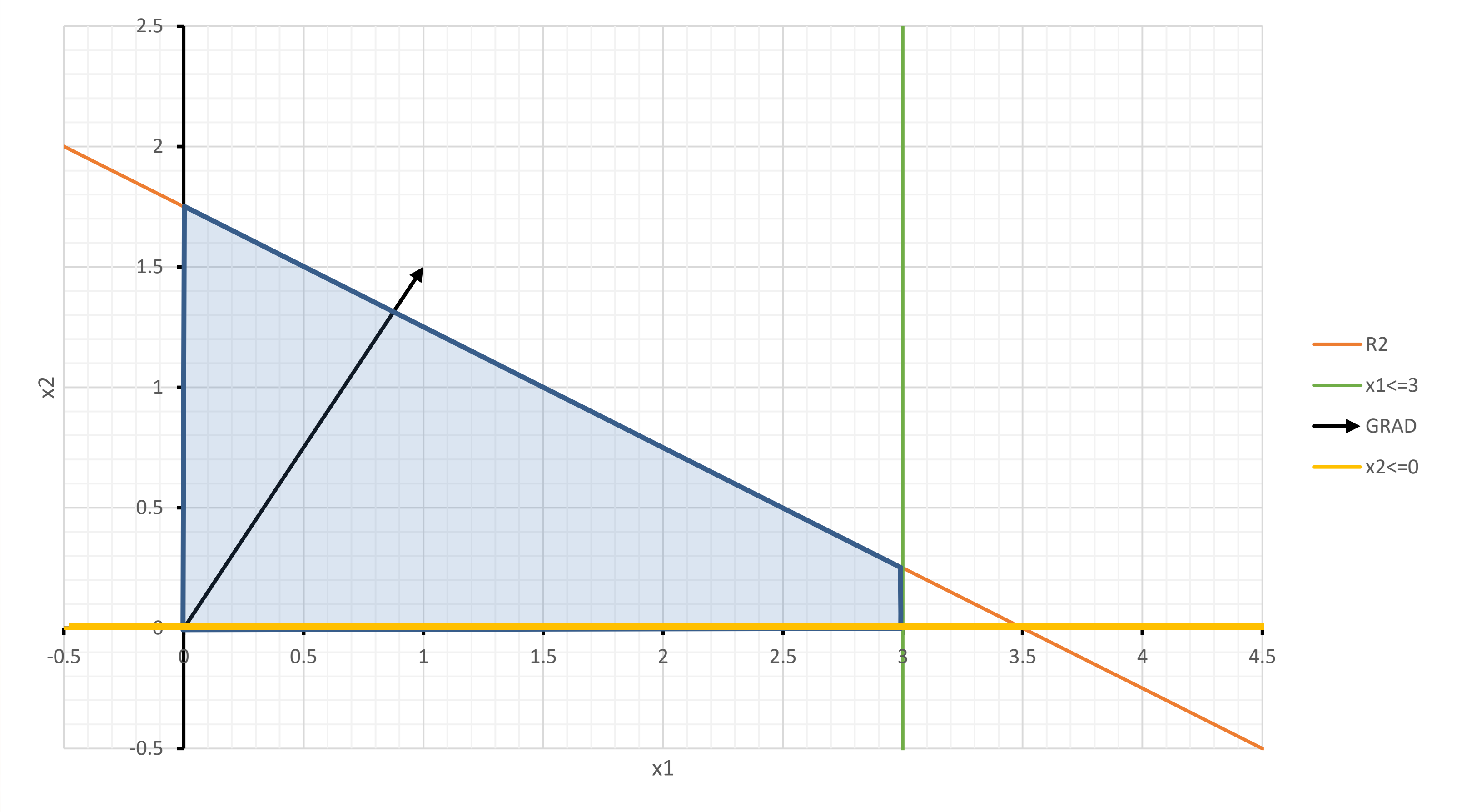


Método de ramificación y acotación



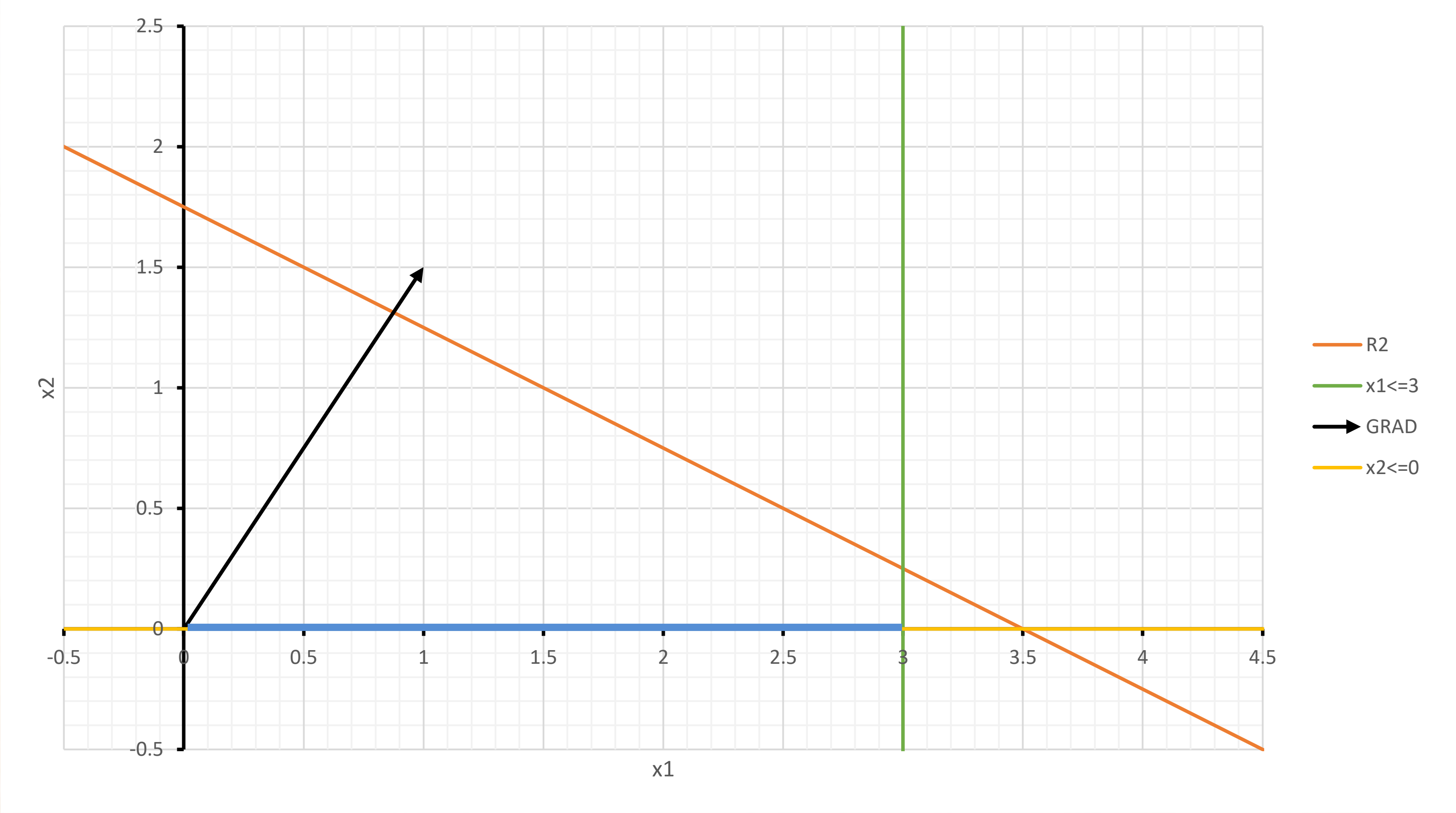
Método de ramificación y acotación

$$P_3 = P_1 + \{ x_2 \leq 0 \}$$



Método de ramificación y acotación

P3

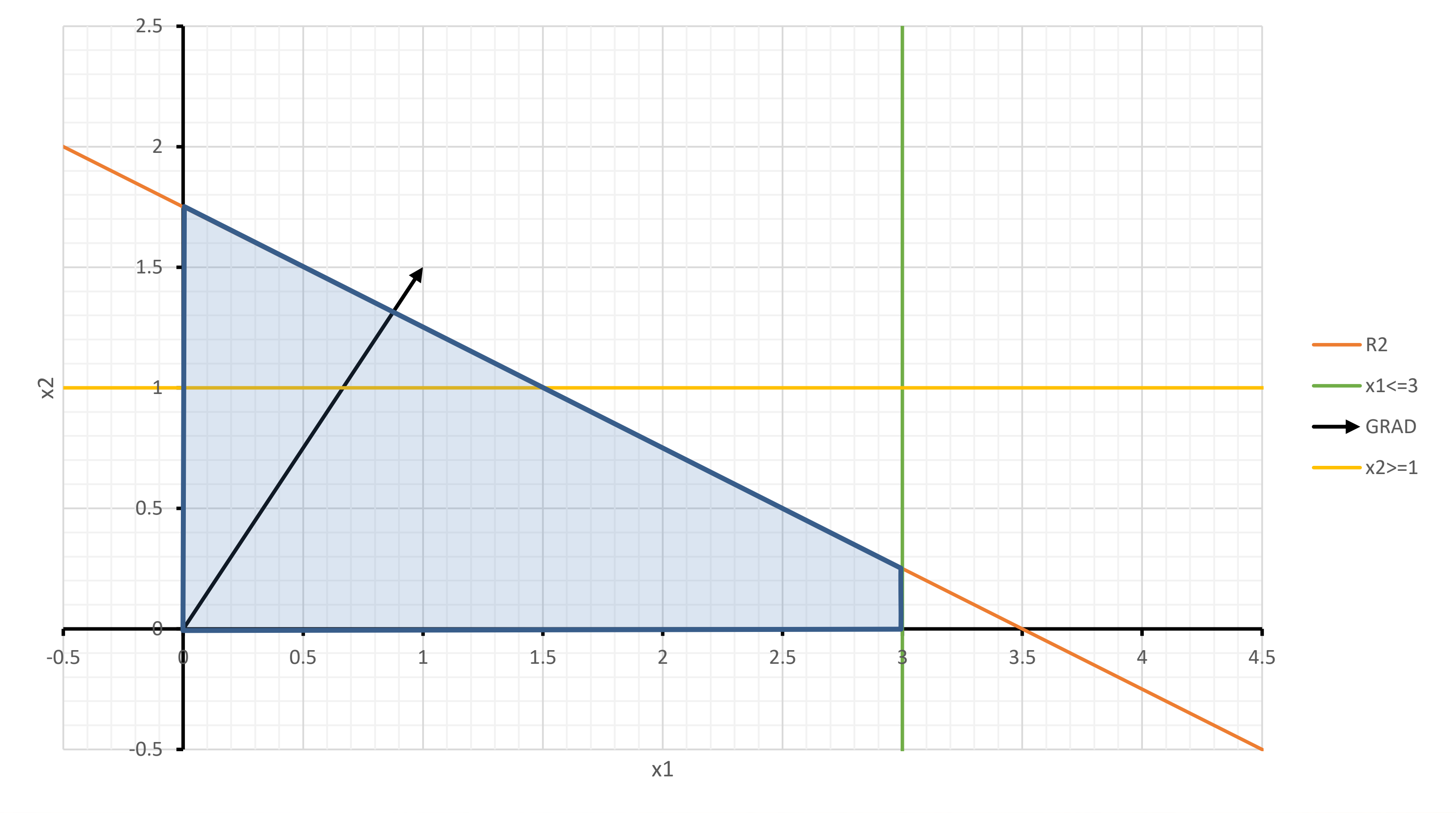


Método de ramificación y acotación

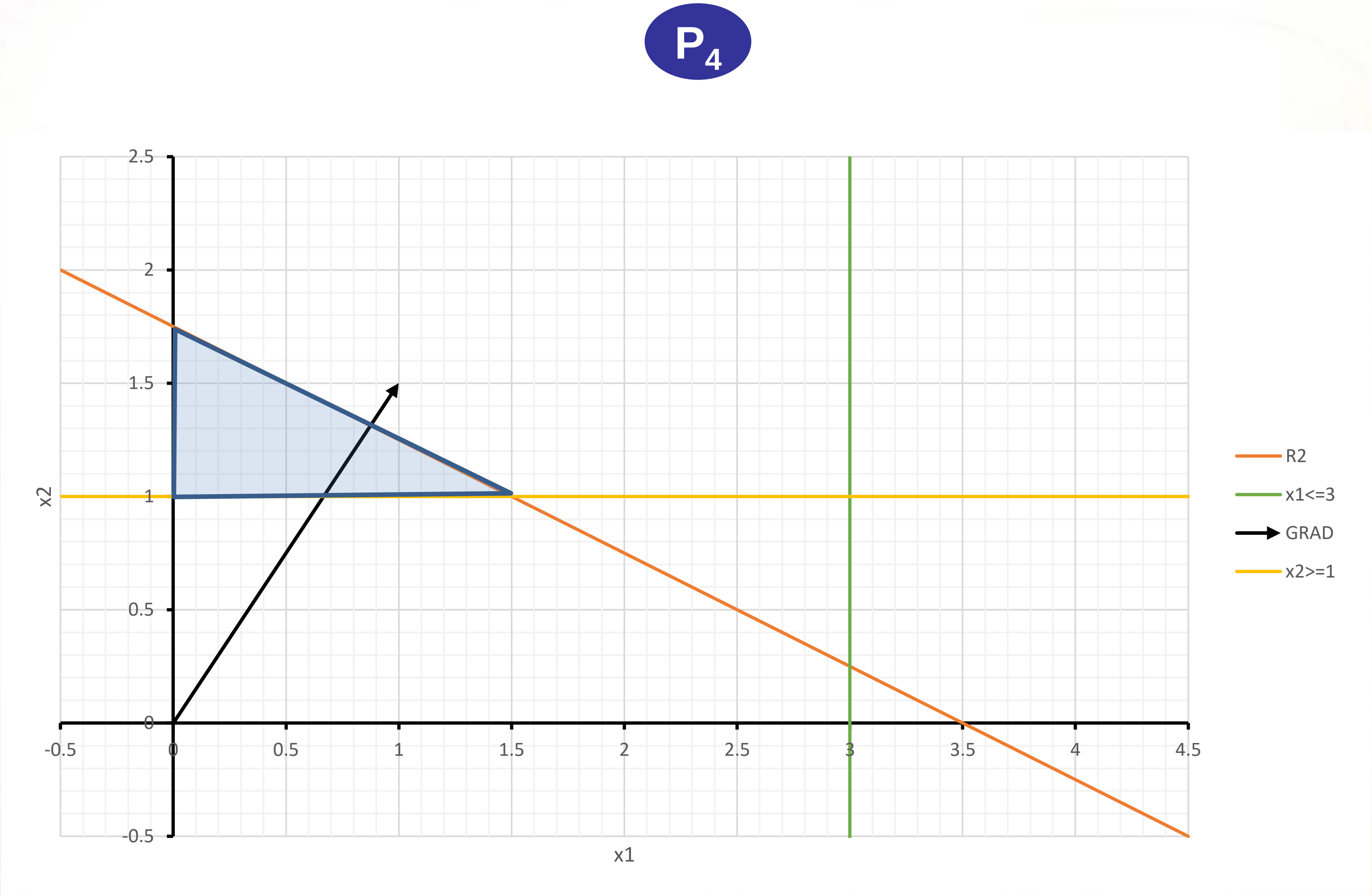
P_3 $x_3^*=(3,\ 0)\quad z_3^*=6$

Método de ramificación y acotación

$P_4 = P_1 + \{ x_2 \geq 1 \}$



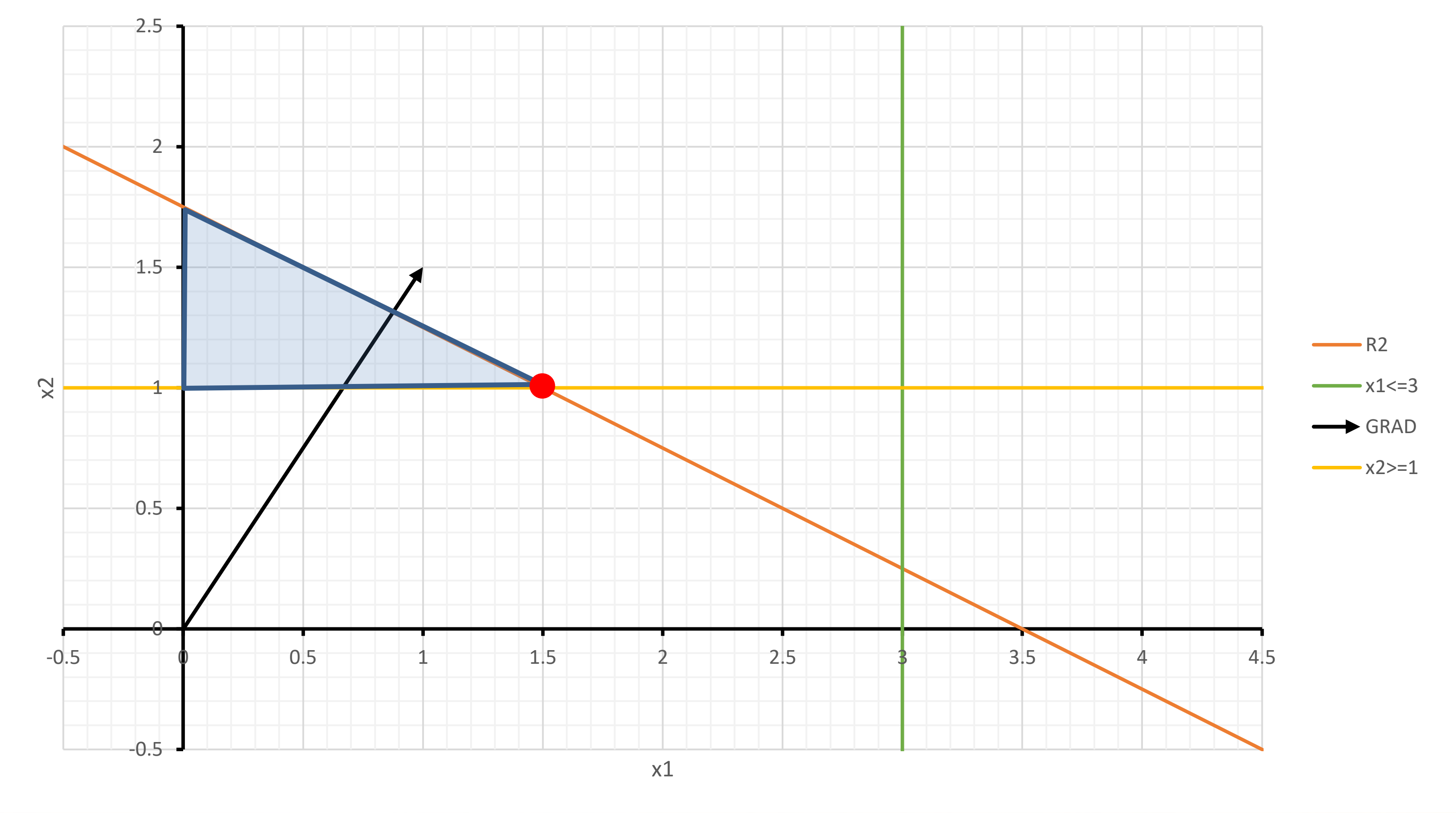
Método de ramificación y acotación



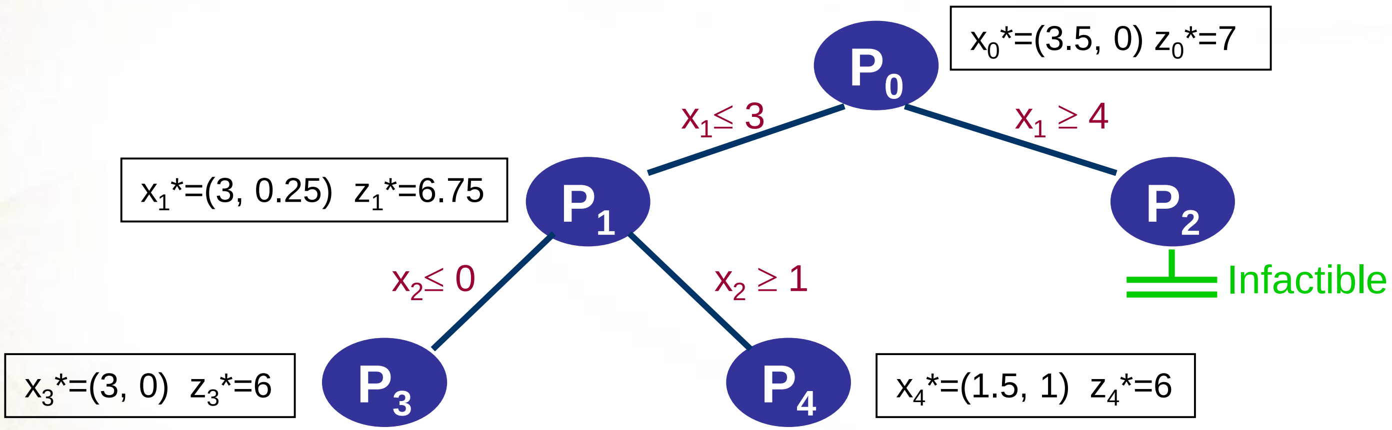
Método de ramificación y acotación

P_4

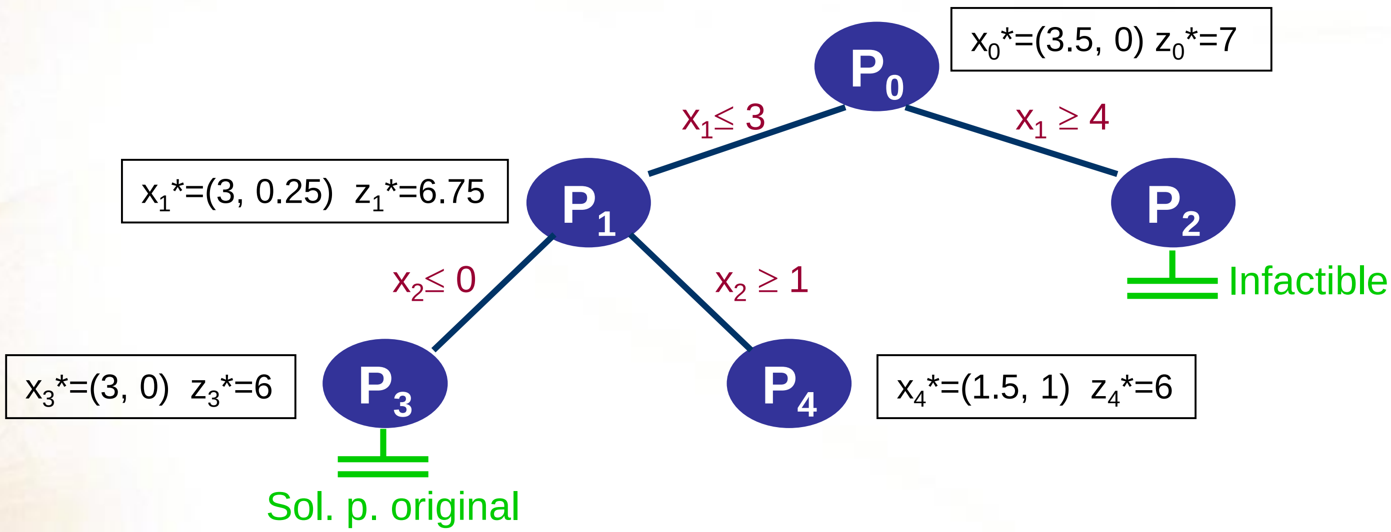
$x_4^*=(1.5,\ 1)\ \ z_4^*=6$



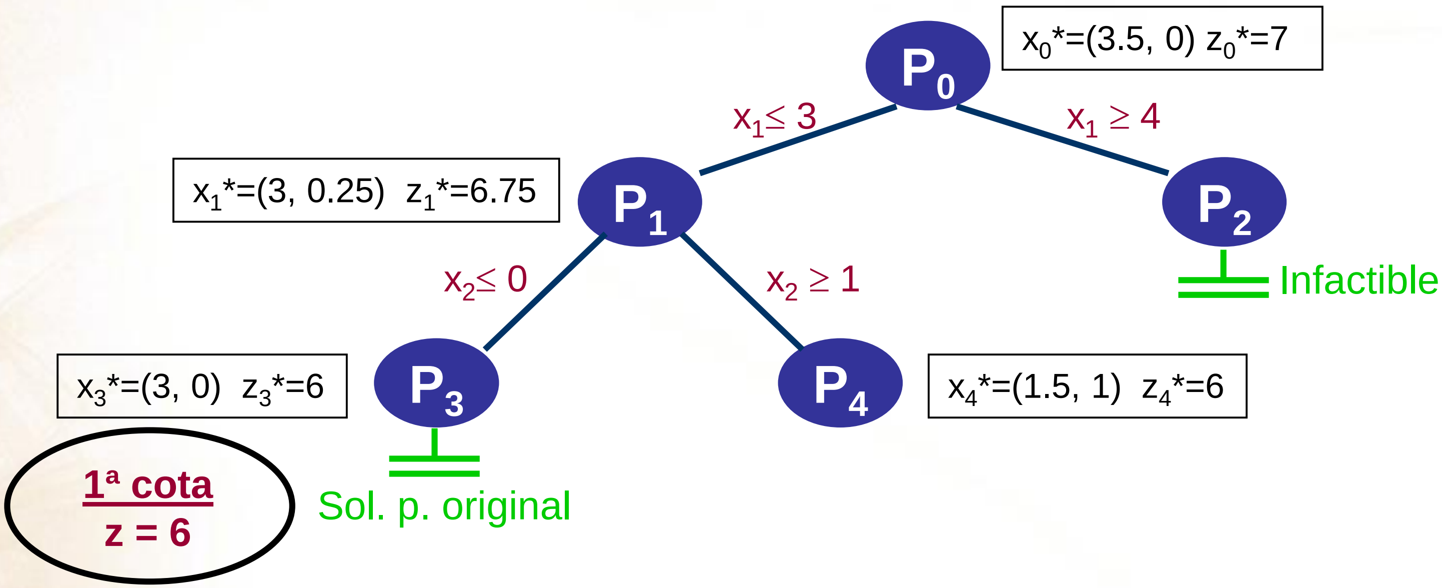
Método de ramificación y acotación



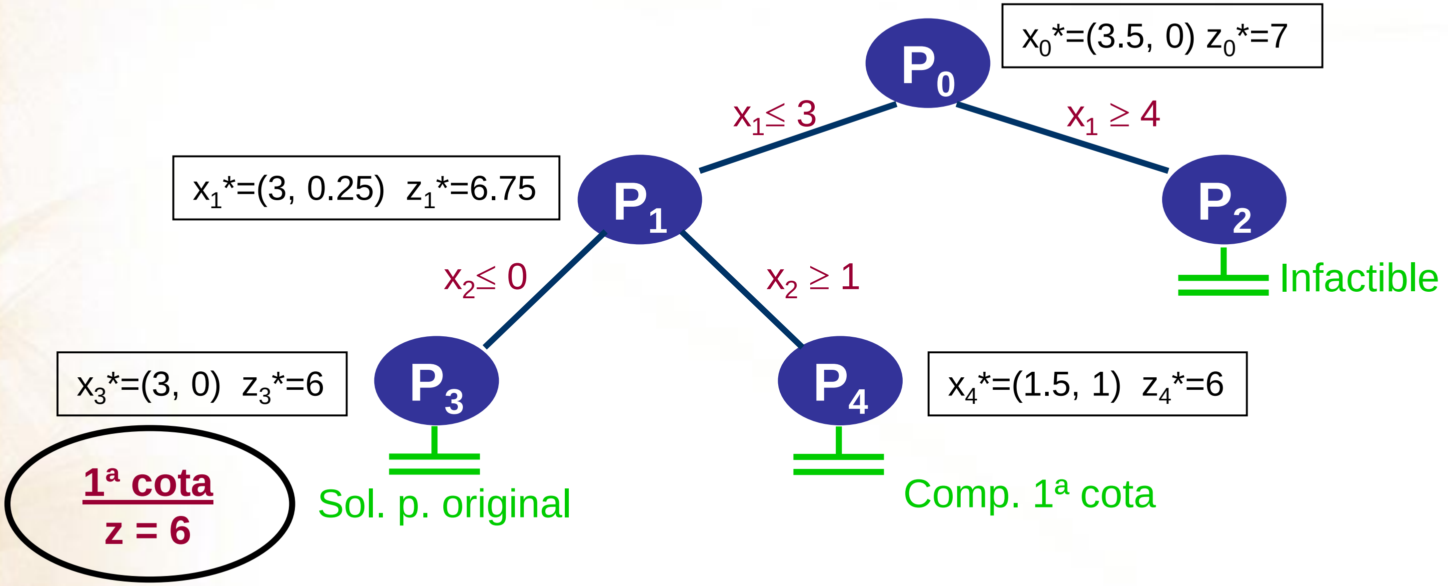
Método de ramificación y acotación



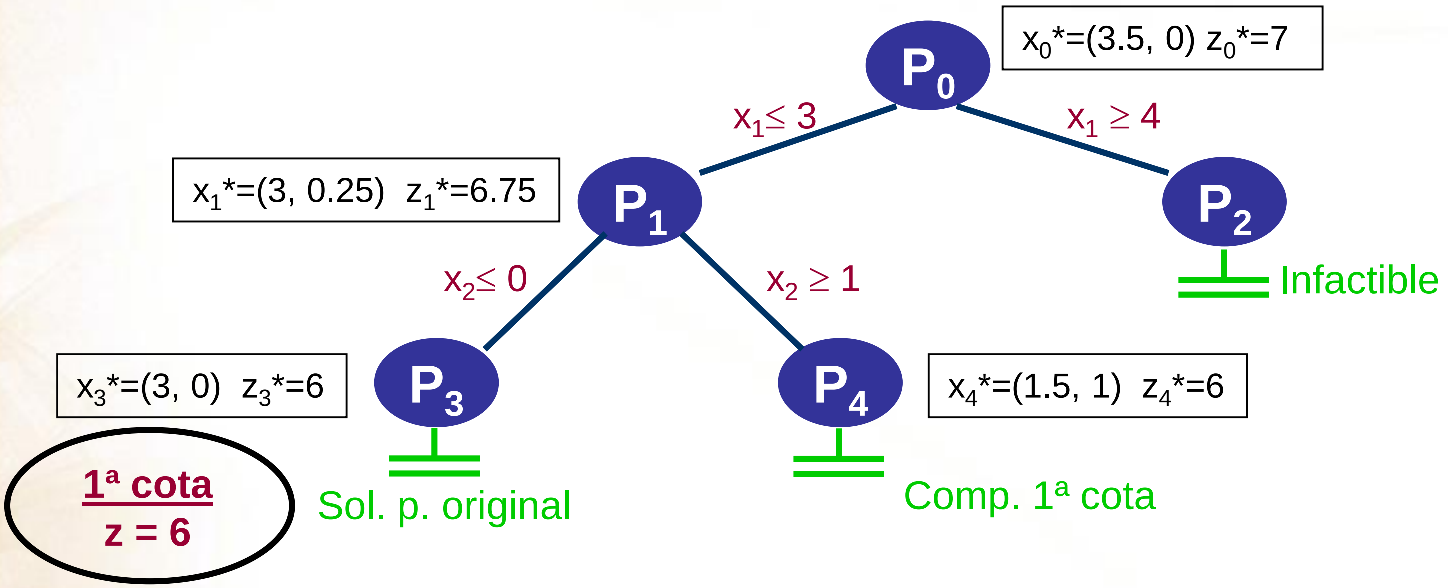
Método de ramificación y acotación



Método de ramificación y acotación



Método de ramificación y acotación



SOLUCIÓN: $x^*=(3, 0)$ $z^*=6$

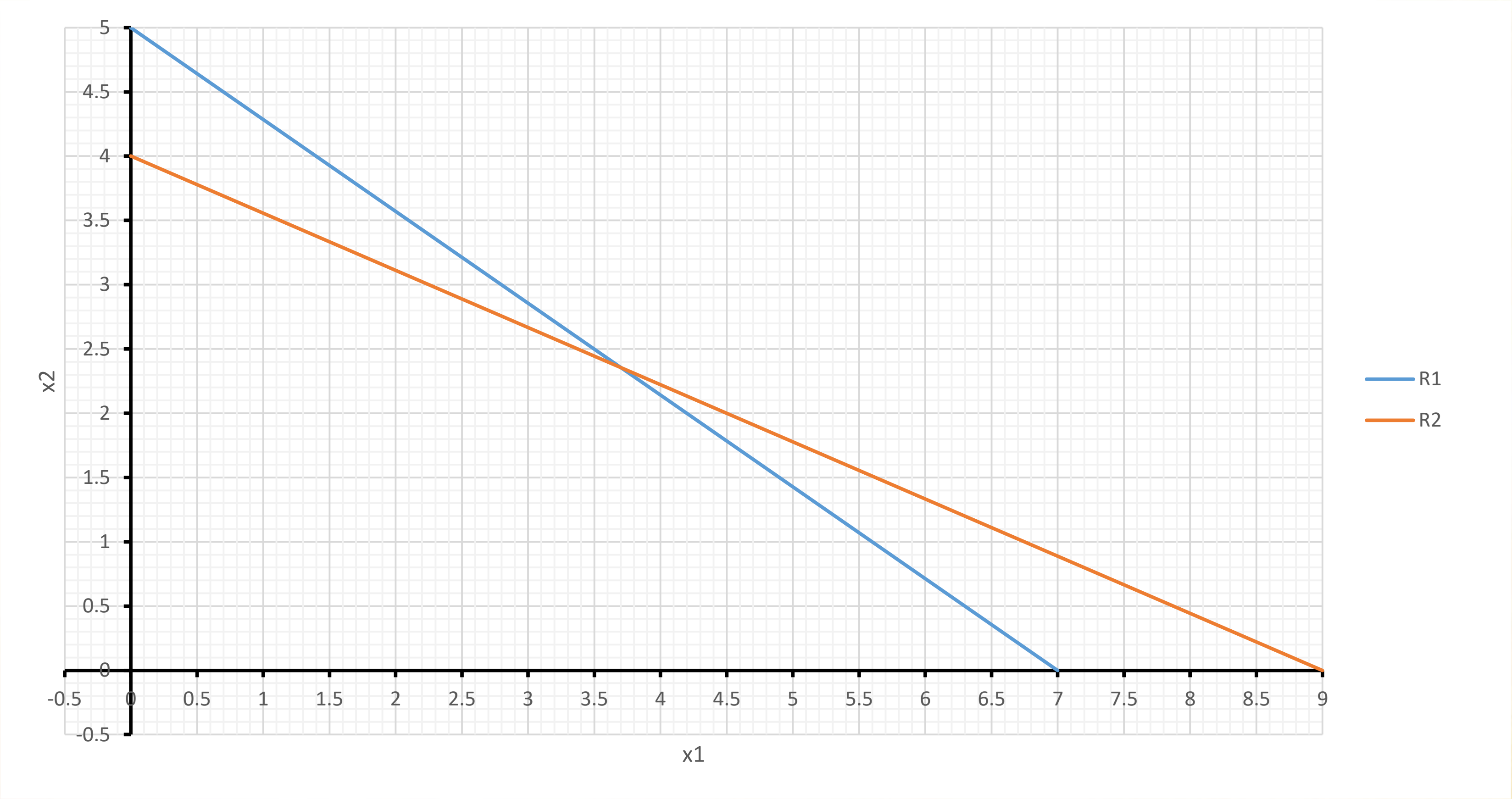
EJEMPLO:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ s.a: & 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ & 4x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ s.a: & 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ & 4x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Problema Original **Problema Relajado**

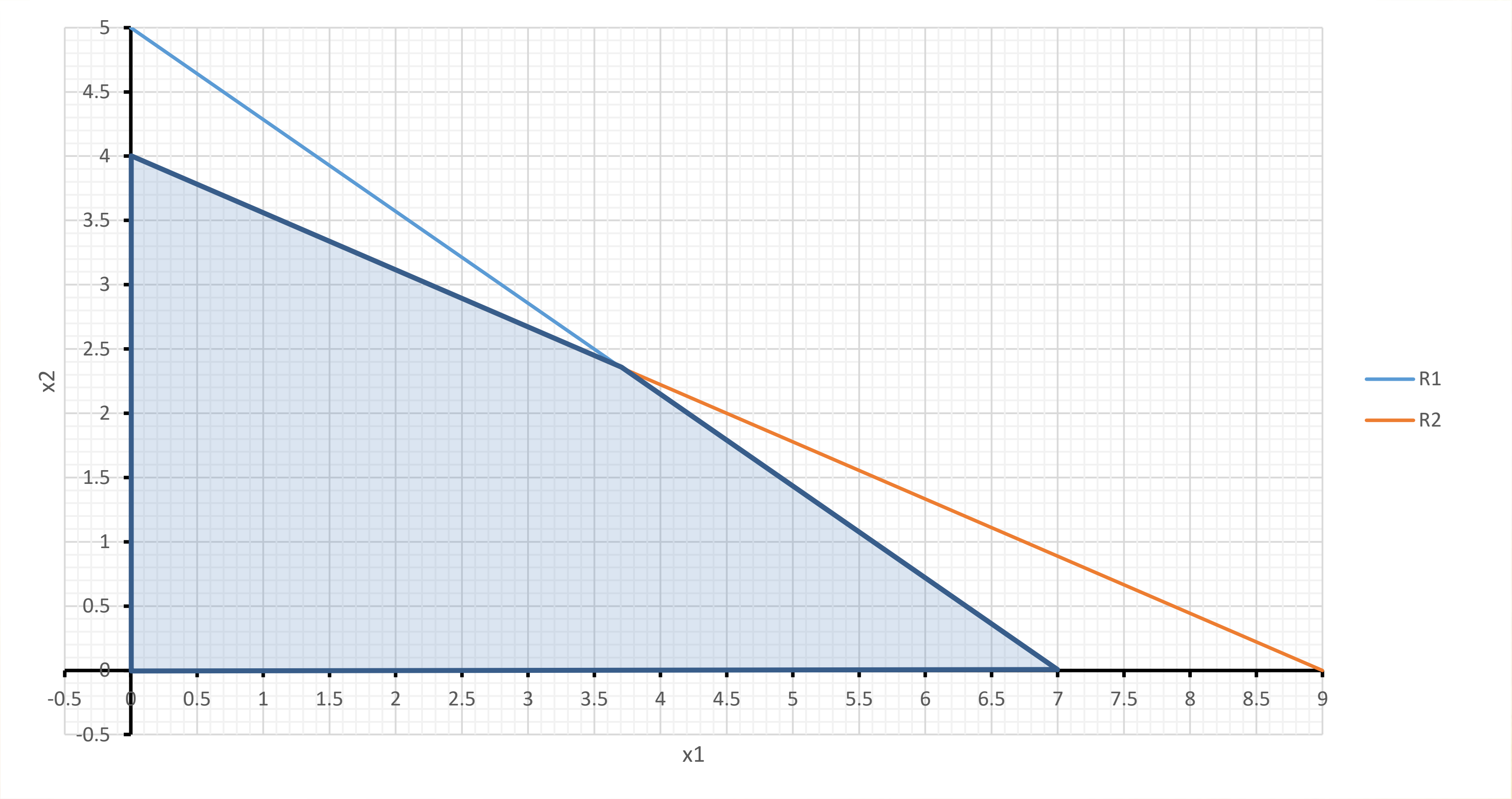
P_0

P$_0$



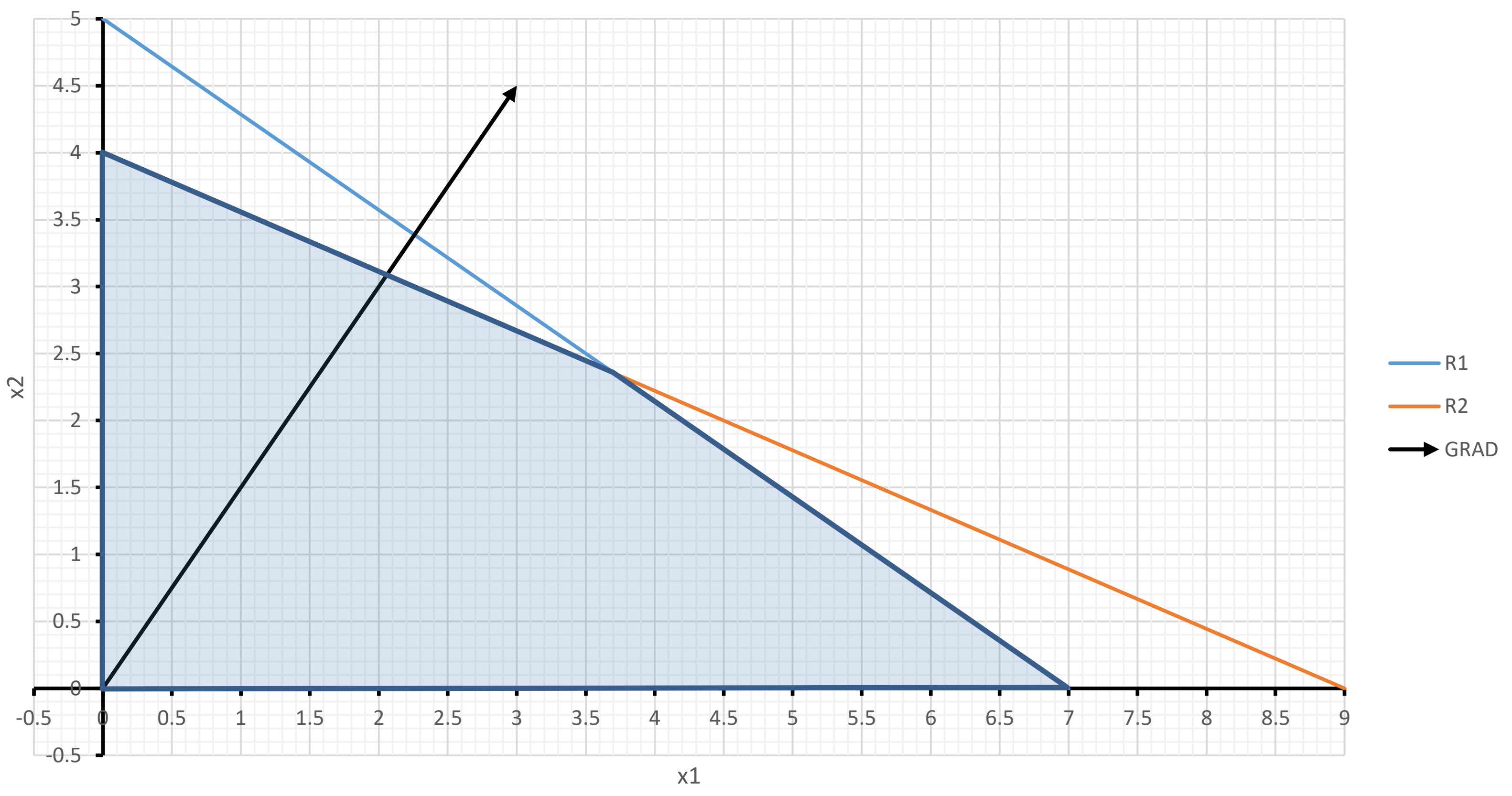
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
x2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
x1
R1
R2

P_0



x2
x1
R1
R2
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9

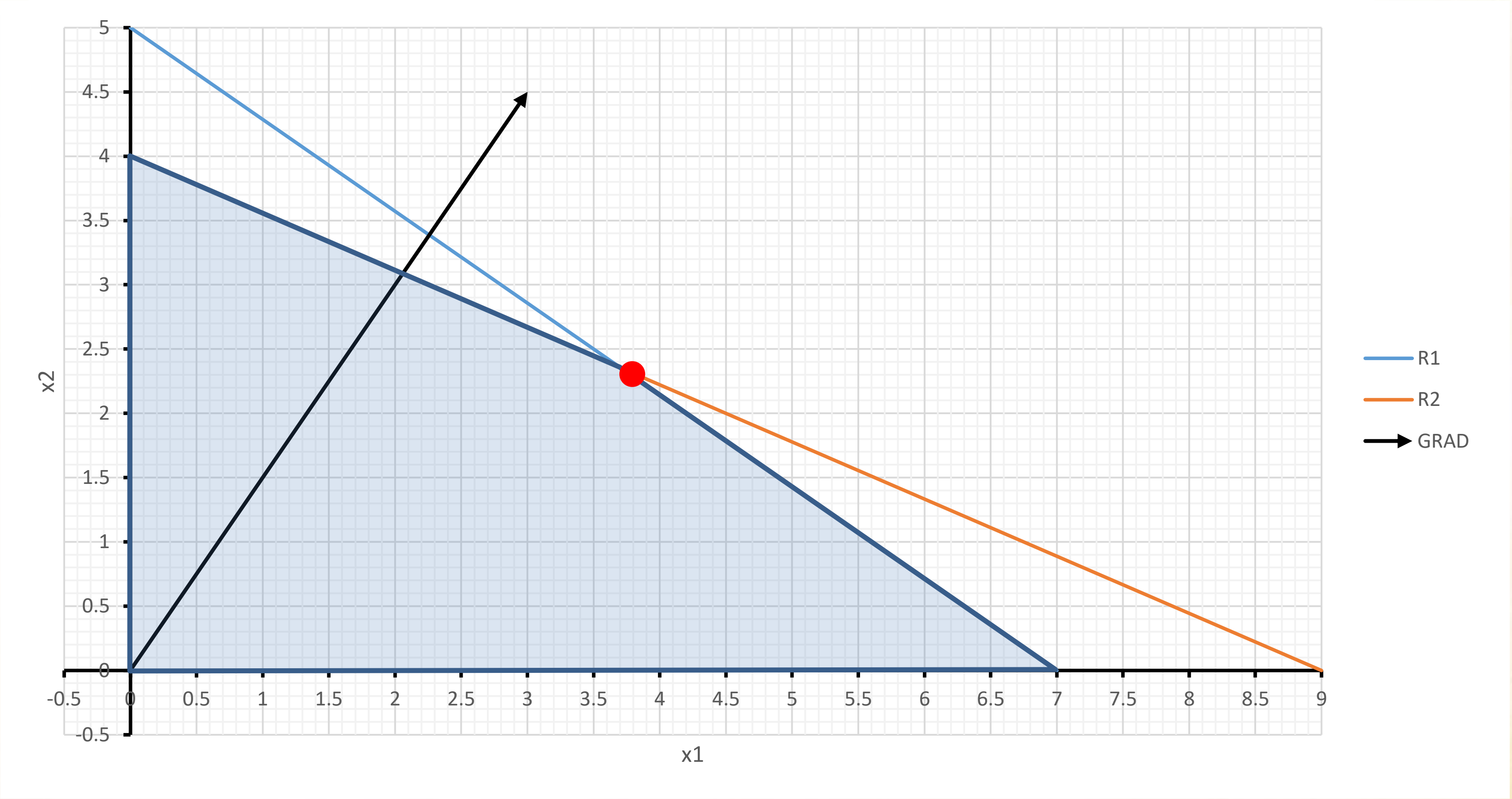
P_0



UNIVERSITAS Miguel Hernández

P$_0$

$x_0^*=(3.71,\ 2.4)$ $z_0^*=14.47$



P_0

$x_0^*=(3.71,\ 2.4)\ z_0^*=14.47$

P_0

$x_0^*=(3.71,\ 2.4)\ z_0^*=14.47$

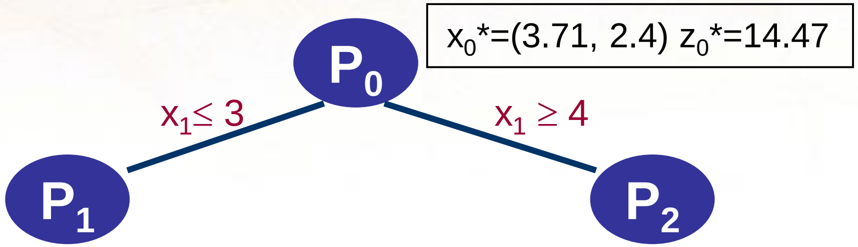
Mayor parte fraccionaria

P_0

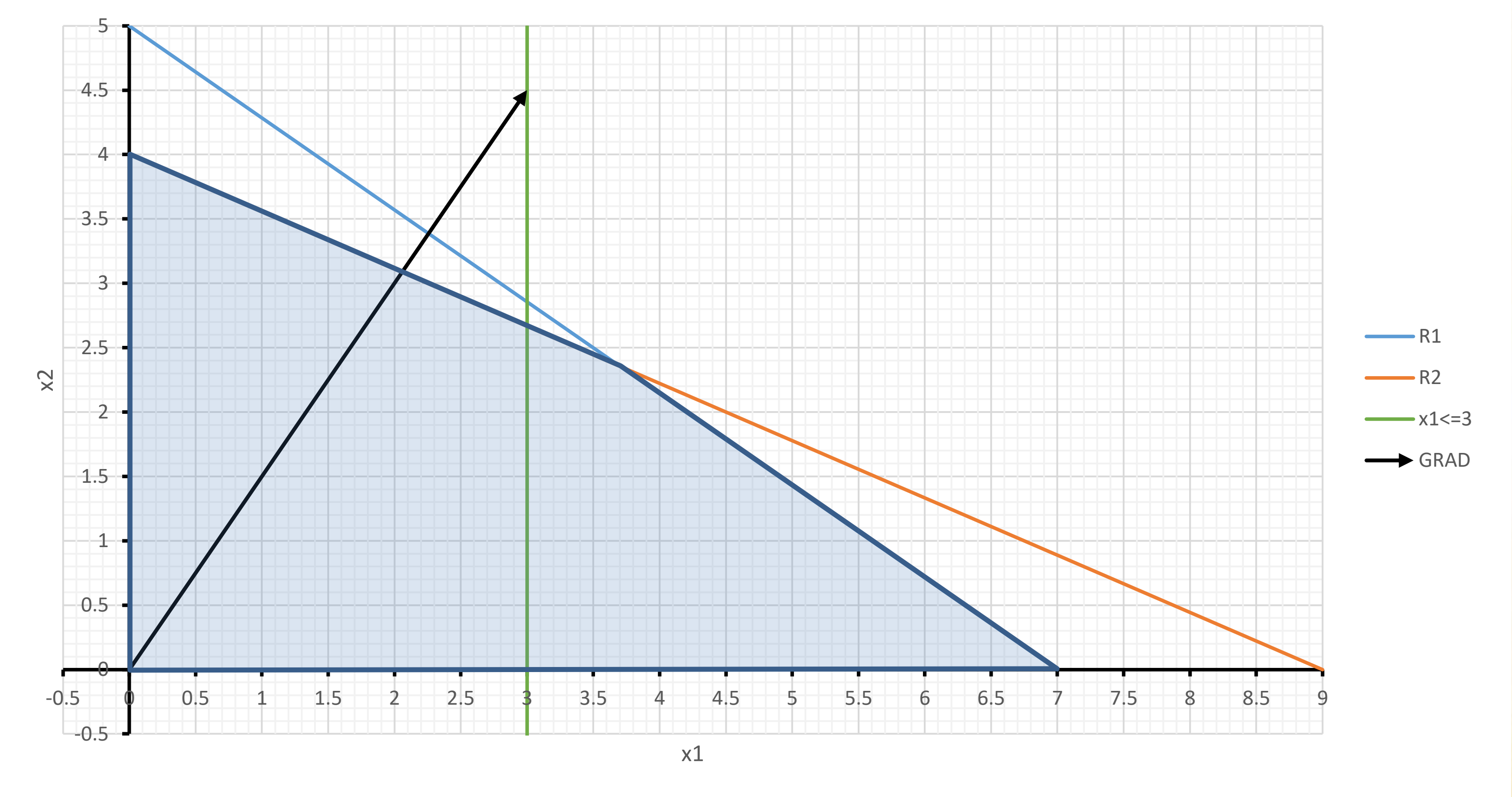
$x_0^*=(3.71, 2.4)\ z_0^*=14.47$

Mayor parte fraccionaria

Se ramifica por x1

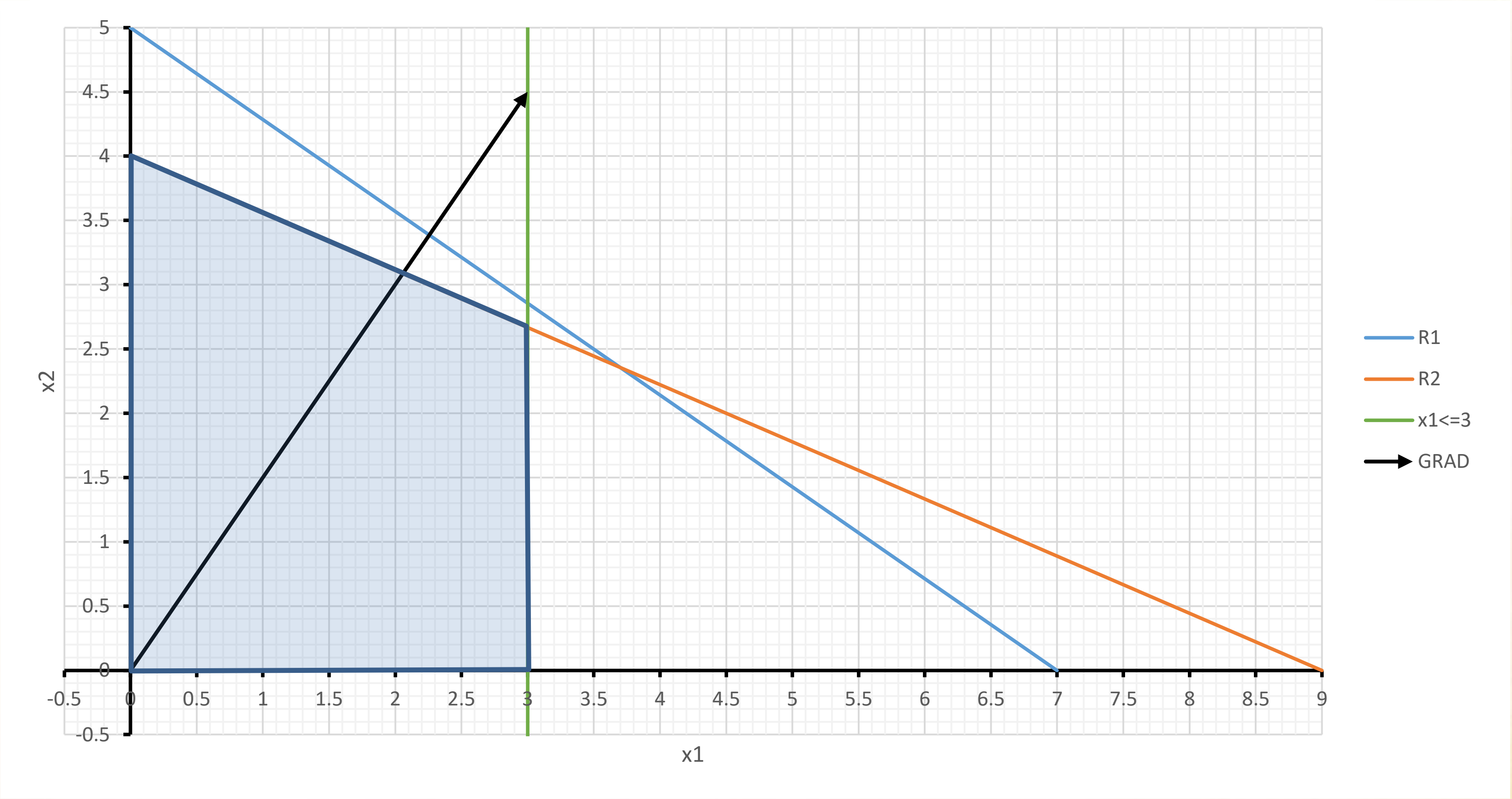

x_0*=(3.71, 2.4) z_0*=14.47
P_0
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
P_1
P_2

$P_1 = P_0 + \{ x_1 \leq 3 \}$



UNIVERSITAS Miguel Hernández

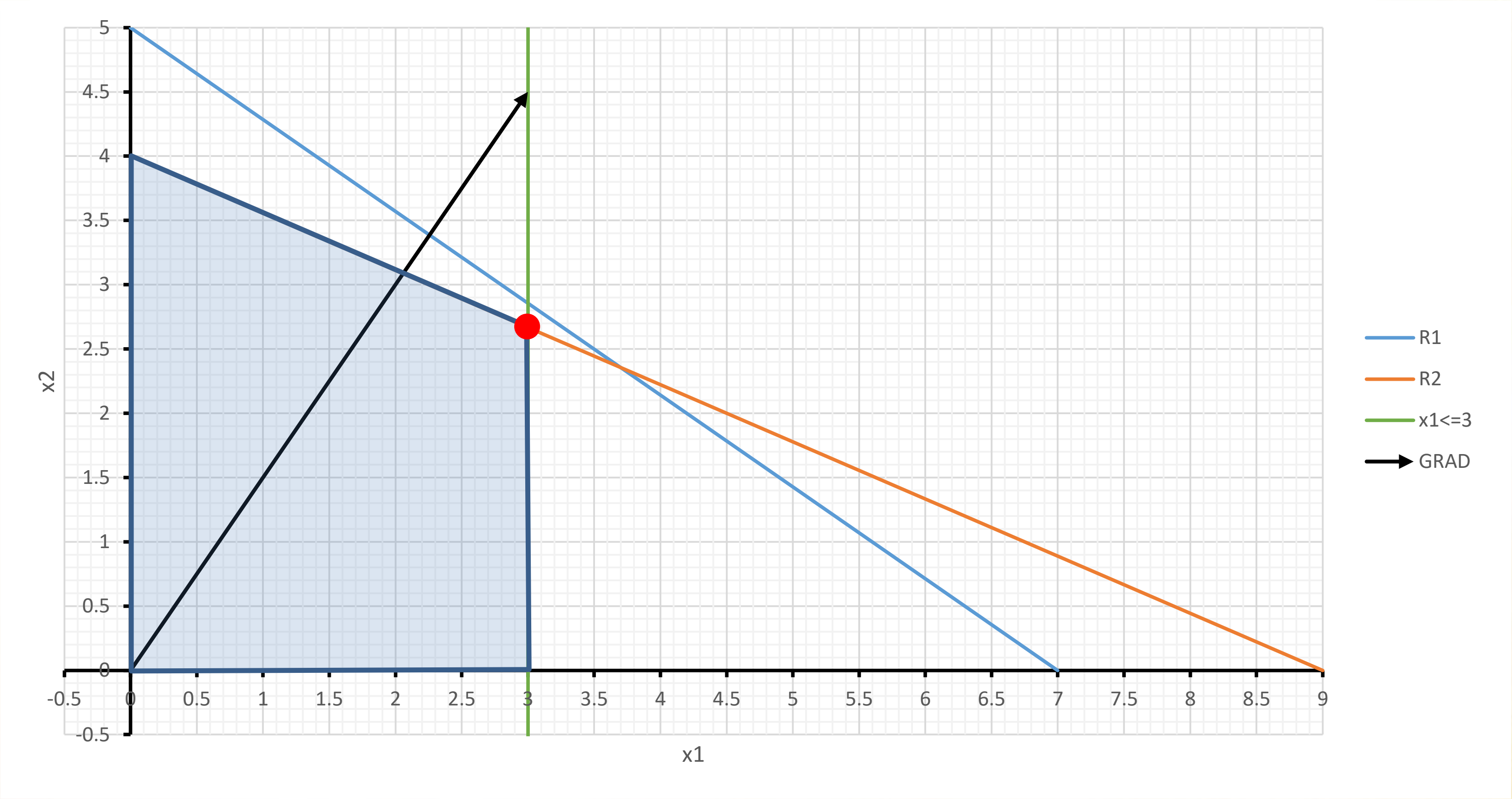
P_1



5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
x2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
x1
R1
R2
x1<=3
GRAD

P_1

$x_1^*=(3,\ 2.67)\quad z_1^*=14$



$$P_2 = P_0 + \{ x_1 \geq 4 \}$$

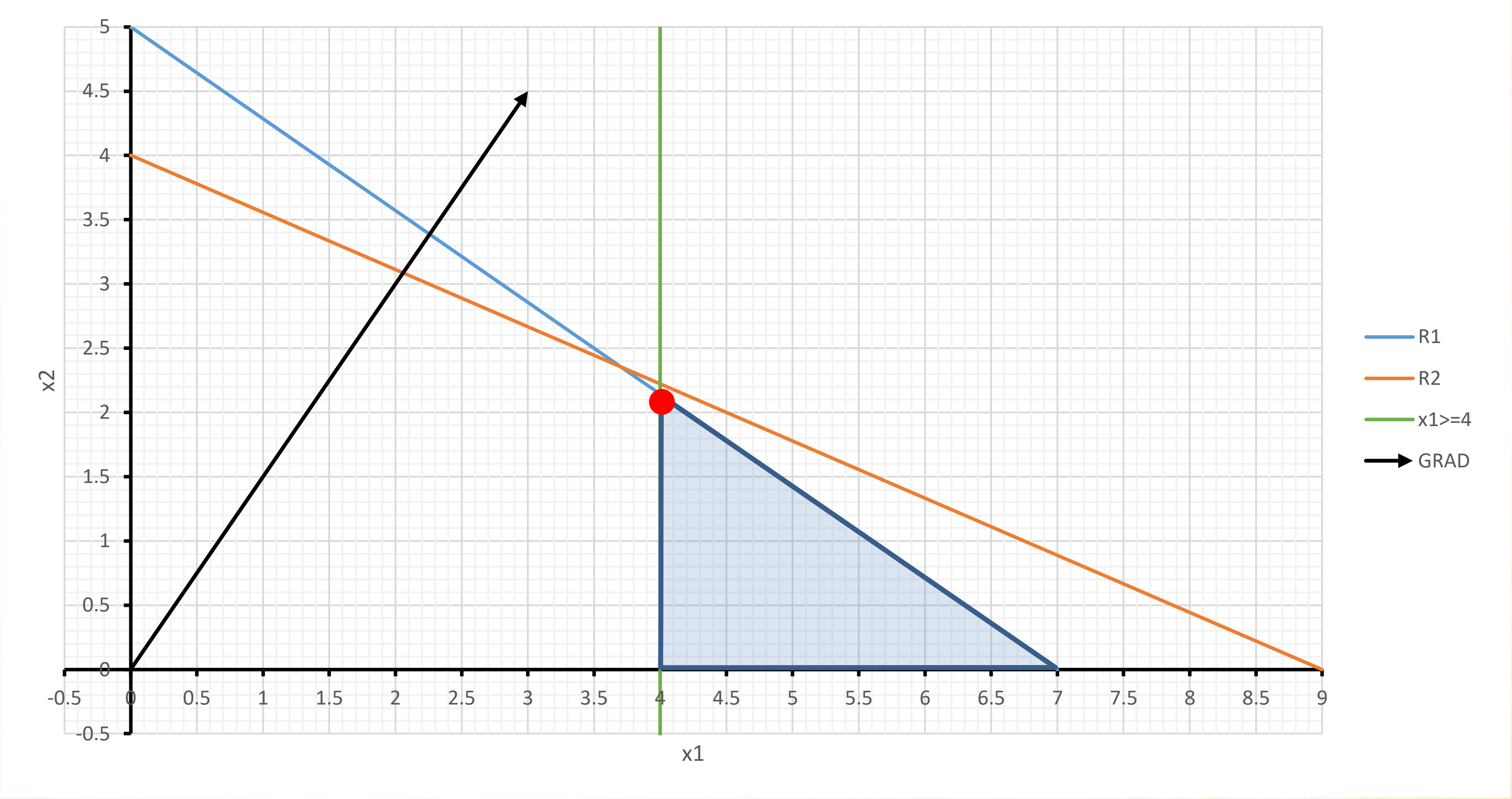
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
x1
x2
R1
R2
x1>=4
GRAD

P_2

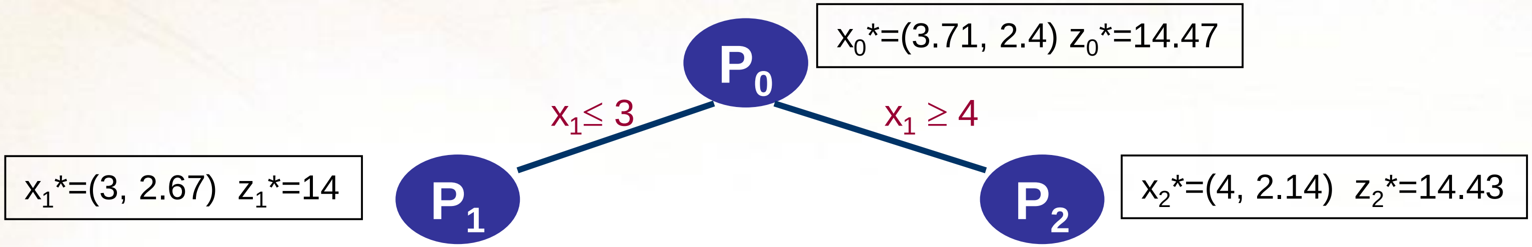
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
x2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
x1
R1
R2
x1>=4
GRAD

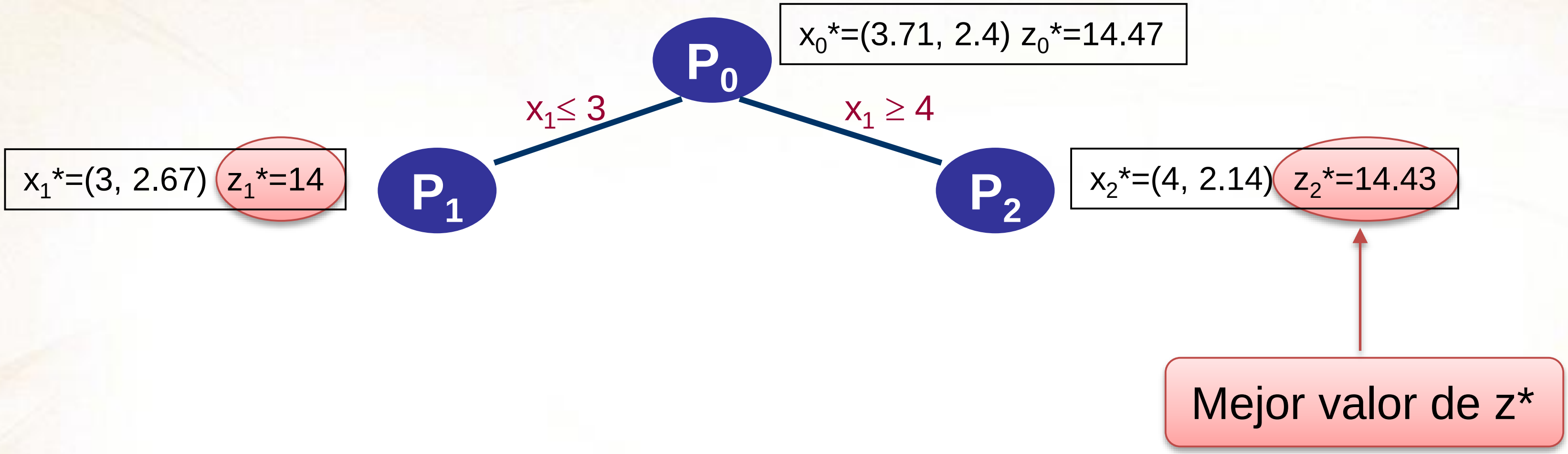
$\mathbf{P_2}$

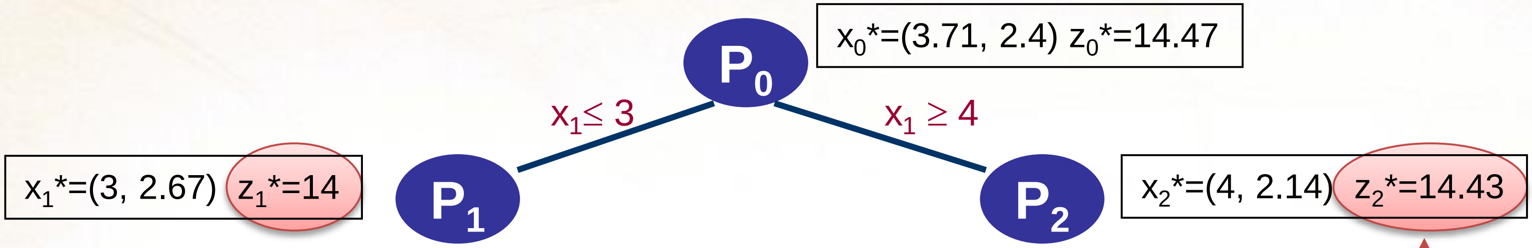
$x_2^*=(4,\ 2.14)\quad z_2^*=14.43$



UNIVERSITAS Miguel Hernández

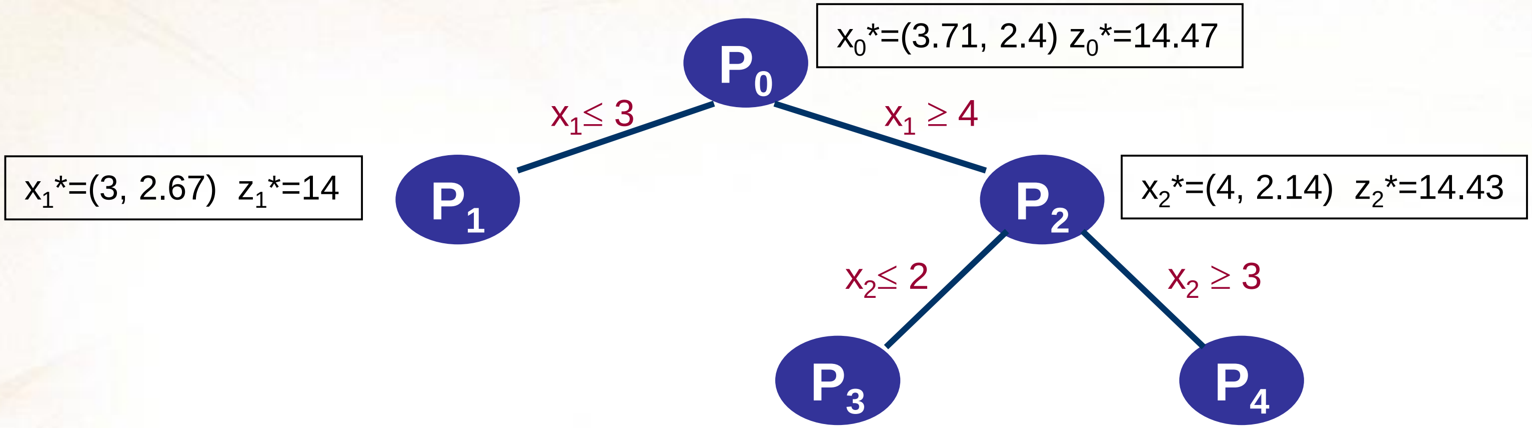

$x_0^*=(3.71, 2.4)$ $z_0^*=14.47$
P_0
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
$x_1^*=(3, 2.67)$ $z_1^*=14$
P_1
P_2
$x_2^*=(4, 2.14)$ $z_2^*=14.43$


$x_0^*=(3.71, 2.4)$ $z_0^*=14.47$
P_0
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
$x_1^*=(3, 2.67)$ $z_1^*=14$
P_1
P_2
$x_2^*=(4, 2.14)$ $z_2^*=14.43$
Mejor valor de z*



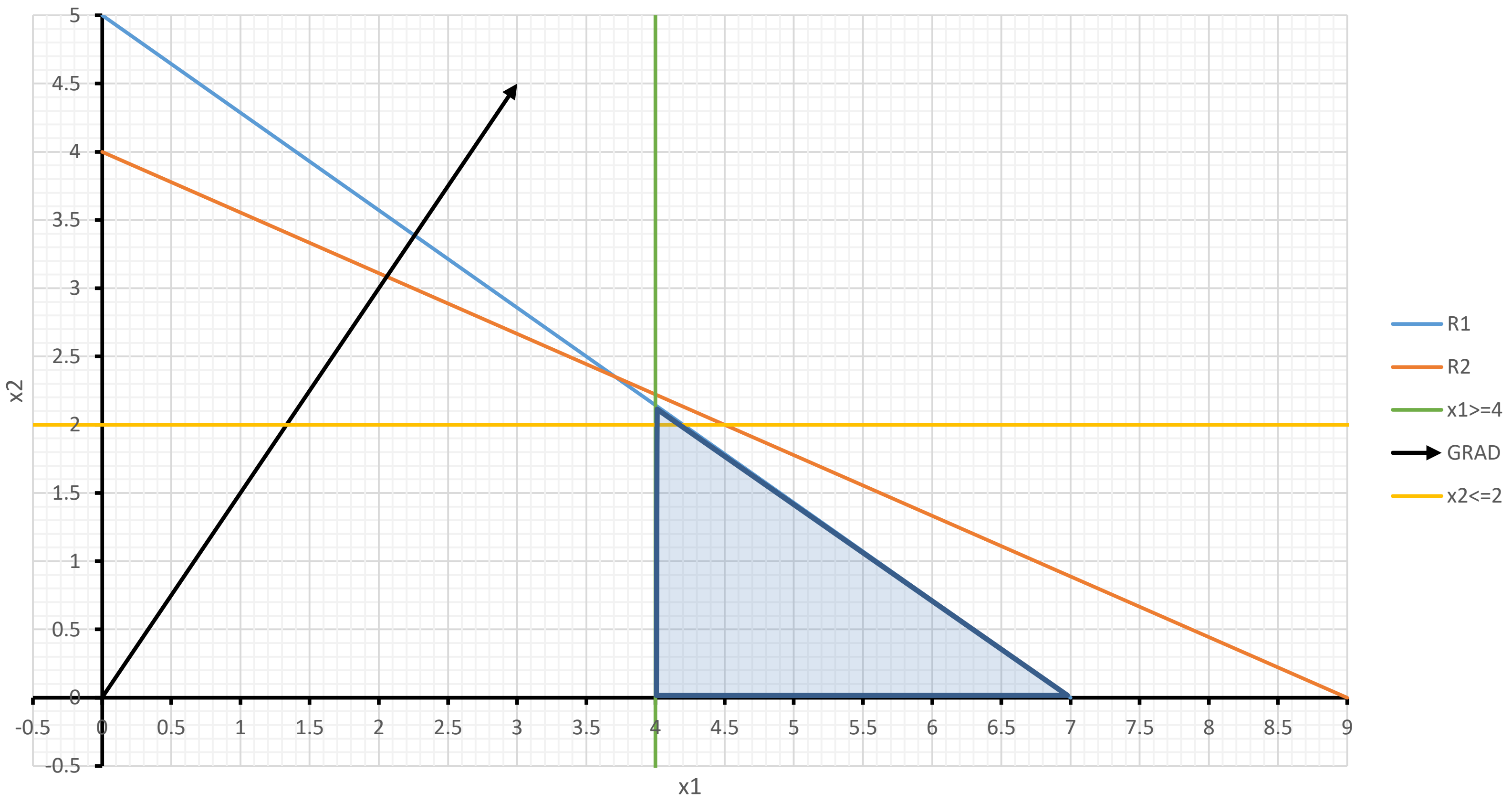
Mejor valor de z*

Se ramifica por P_2

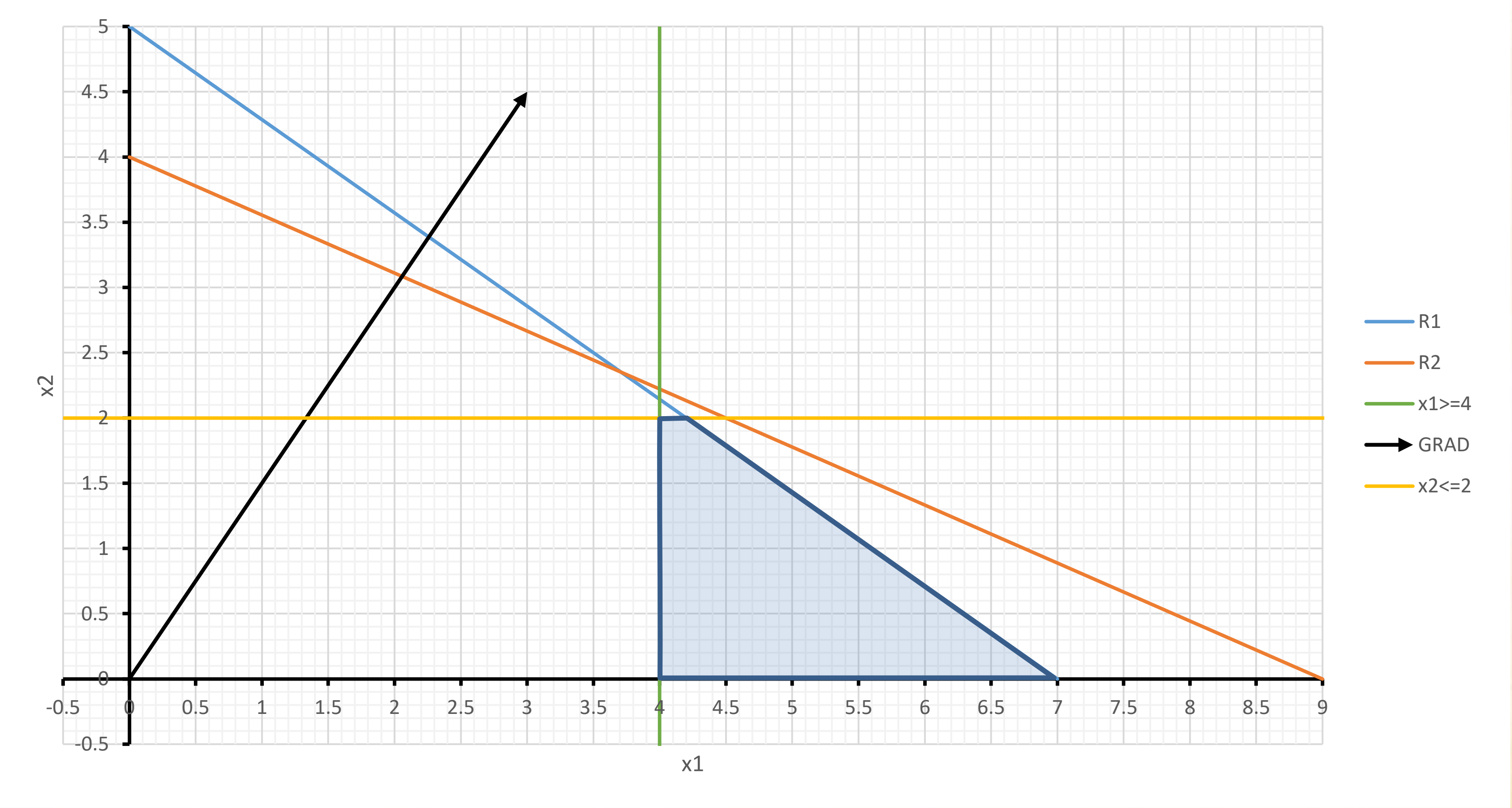


UNIVERSITAS Miguel Hernández

$$P_3 = P_2 + \{ x_2 \leq 2 \}$$

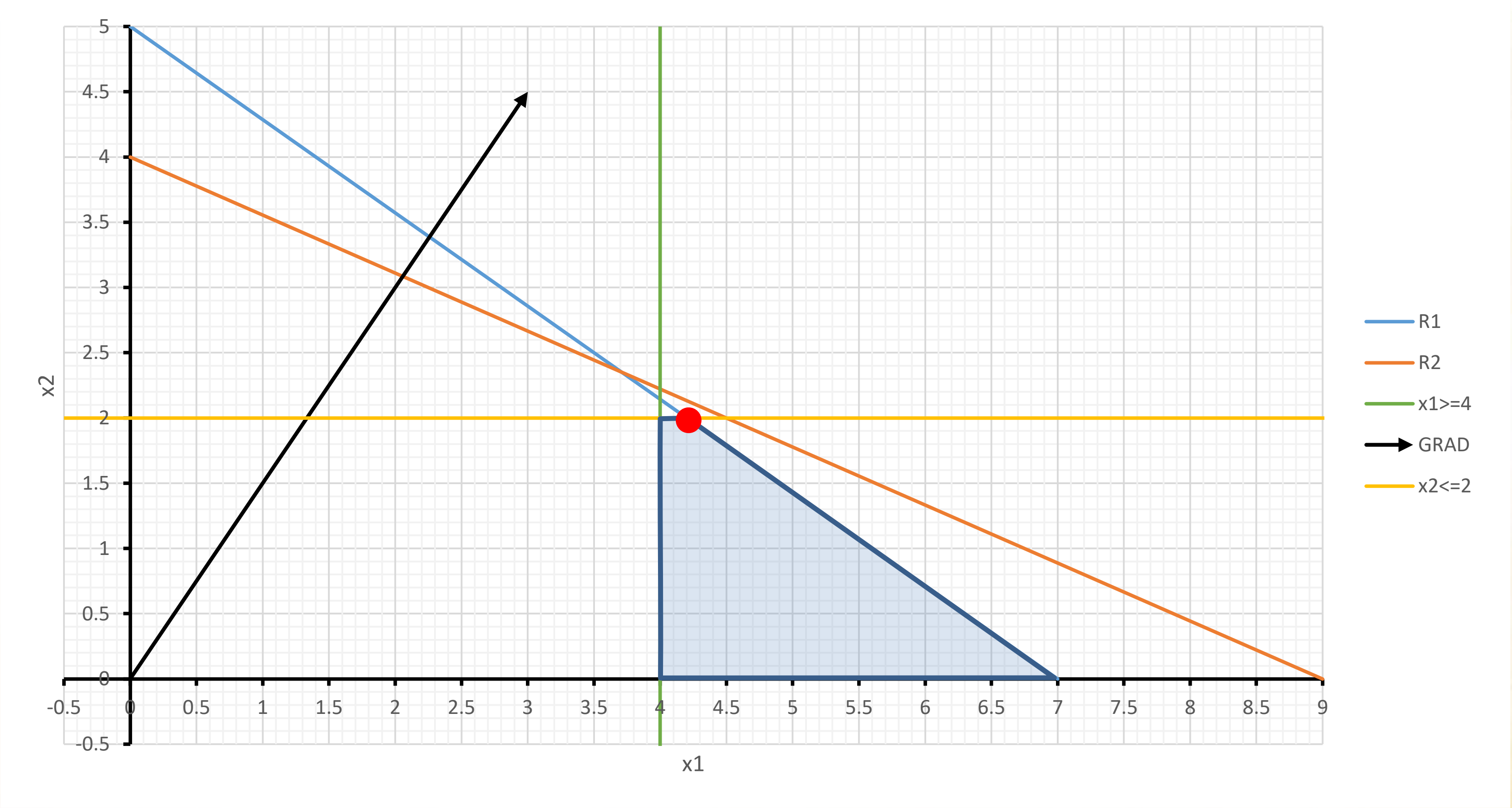

5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
x2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
x1
R1
R2
x1>=4
GRAD
x2<=2

P_3

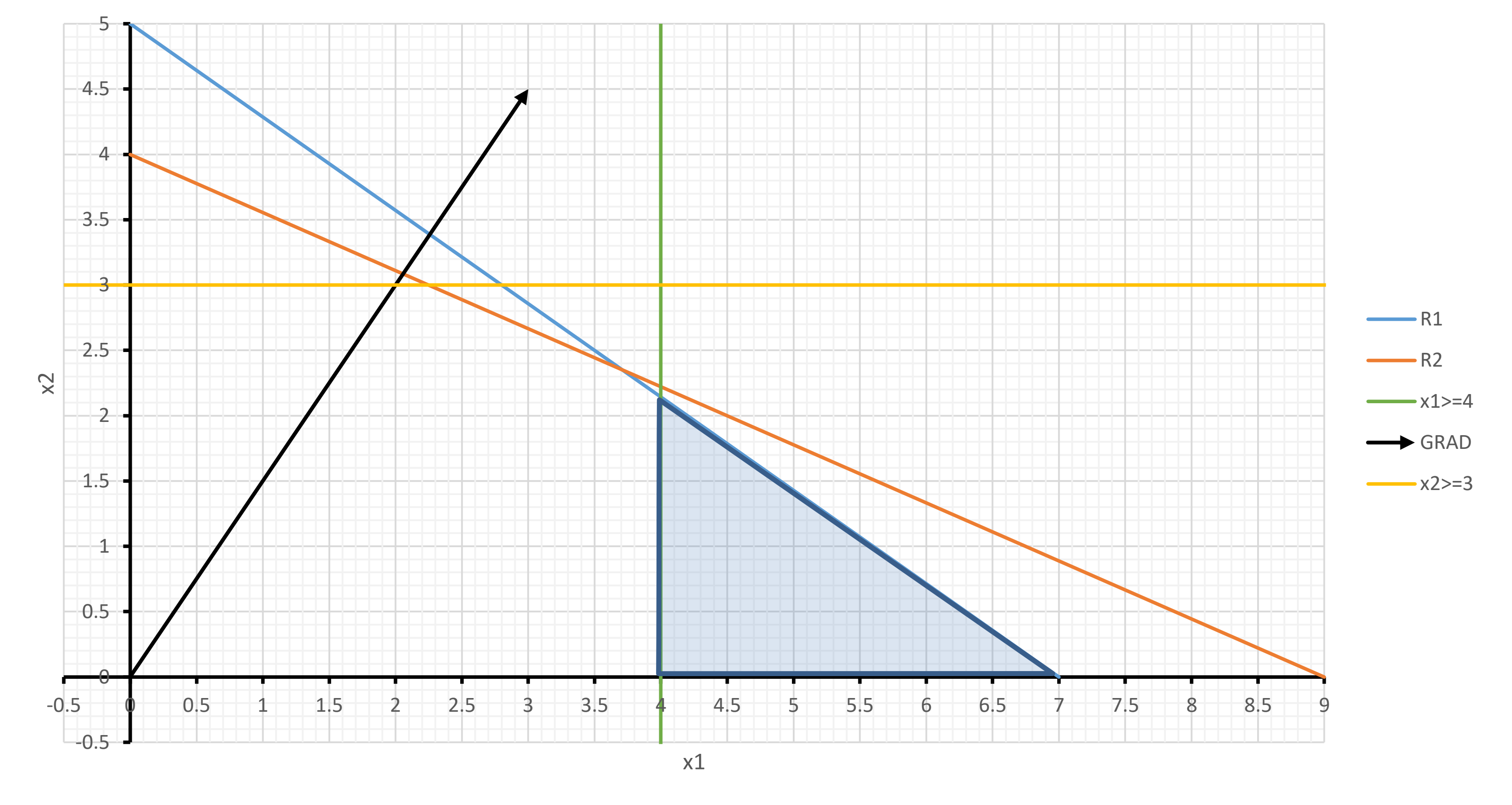


5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
x2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
x1
R1
R2
x1>=4
GRAD
x2<=2

P_3 $x_3^*=(4.19,\ 2)\quad z_3^*=14.4$

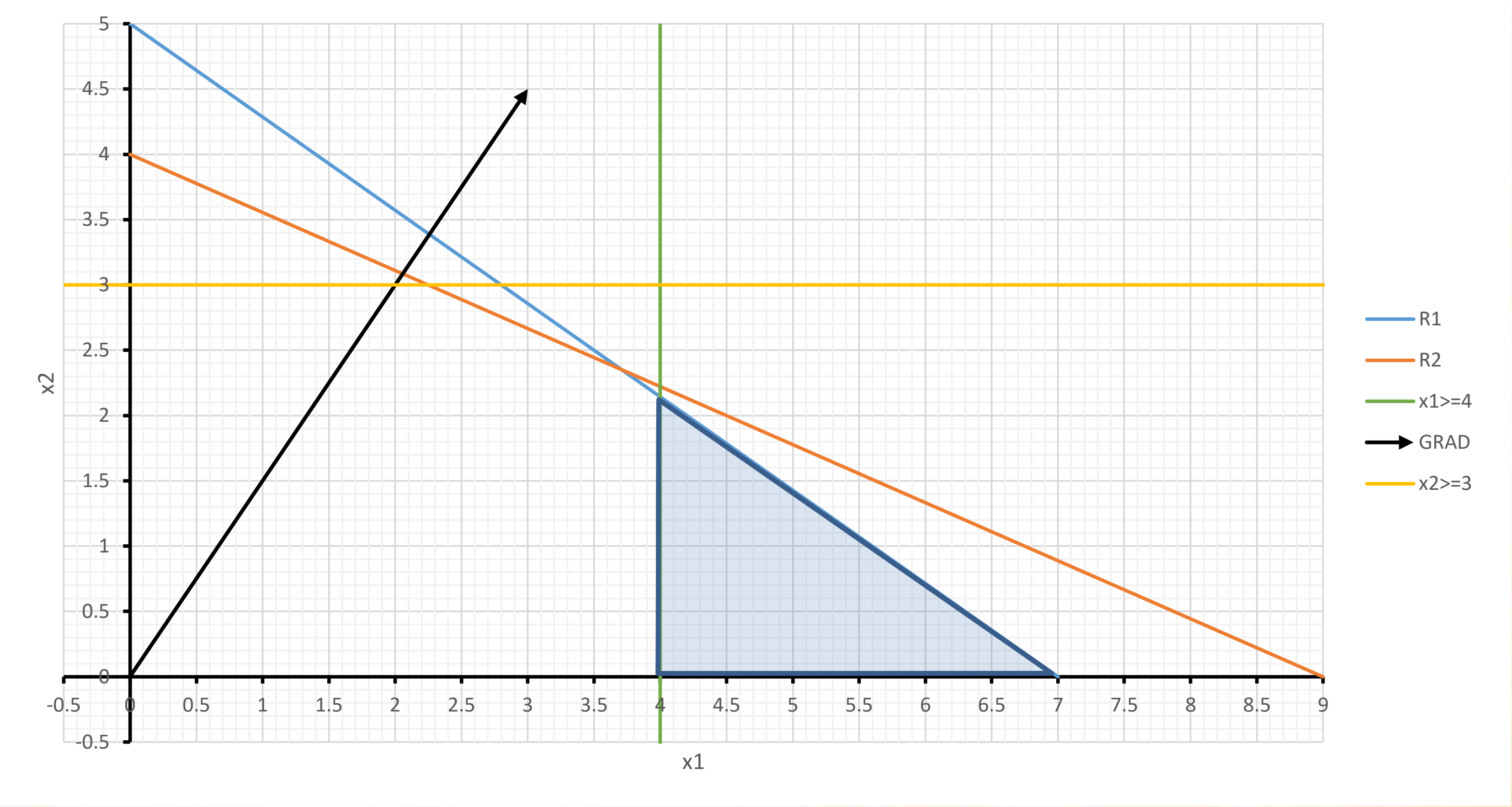


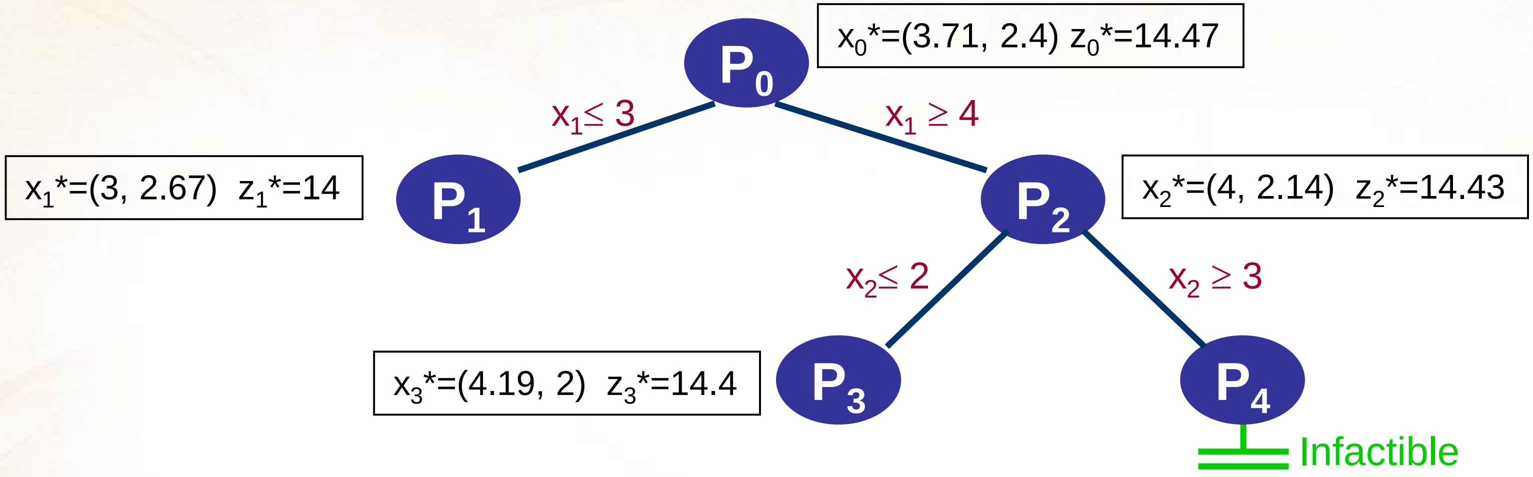
$$P_4 = P_2 + \{ x_2 \geq 3 \}$$

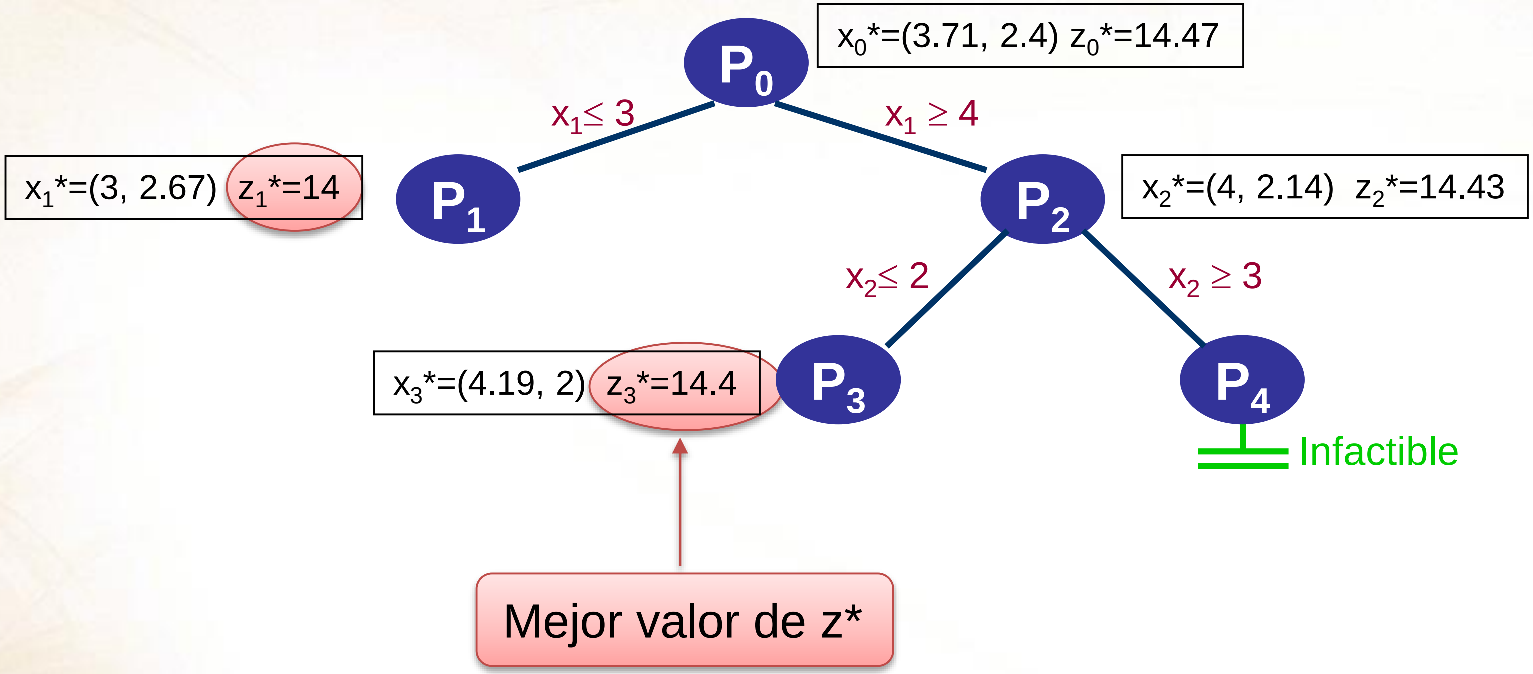


UNIVERSITAS Miguel Hernández

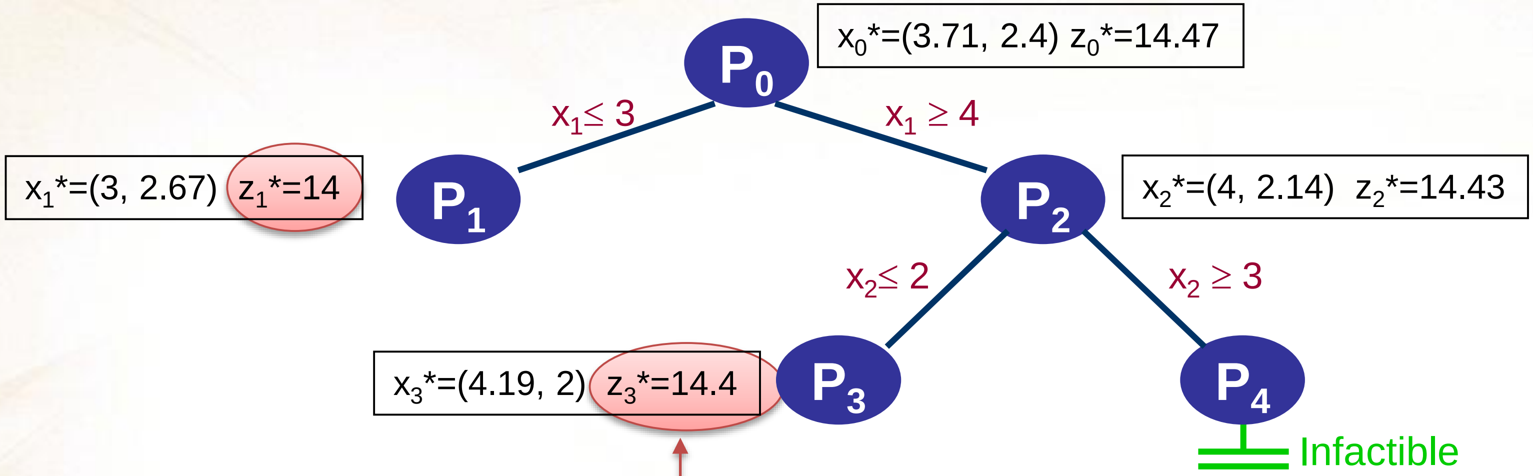
P4 Infactible




P0
x0*=(3.71, 2.4) z0*=14.47
x1≤ 3
x1 ≥ 4
x1*=(3, 2.67) z1*=14
P1
P2
x2*=(4, 2.14) z2*=14.43
x2≤ 2
x2 ≥ 3
x3*=(4.19, 2) z3*=14.4
P3
P4
Infactible

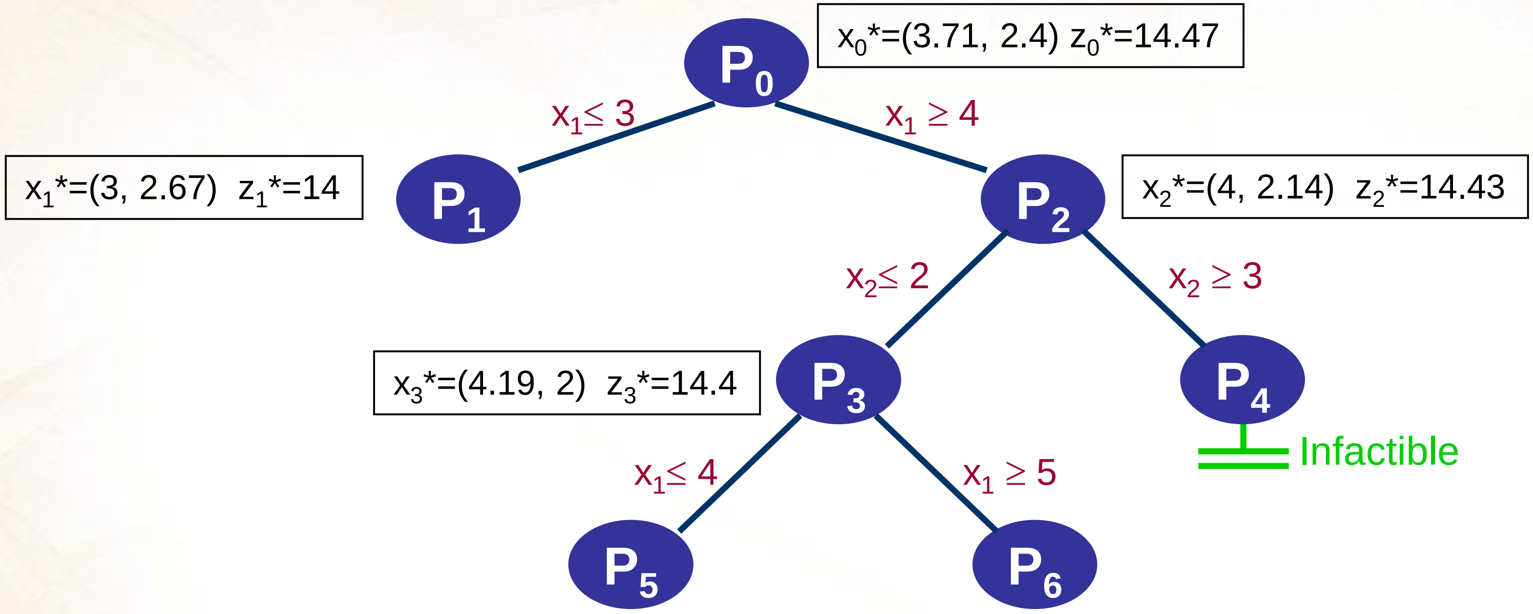


x0*=(3.71, 2.4) z0*=14.47
P0
x1≤ 3
x1 ≥ 4
x1*=(3, 2.67) z1*=14
P1
P2
x2*=(4, 2.14) z2*=14.43
x2≤ 2
x2 ≥ 3
x3*=(4.19, 2) z3*=14.4
P3
P4
Infactible
Mejor valor de z*

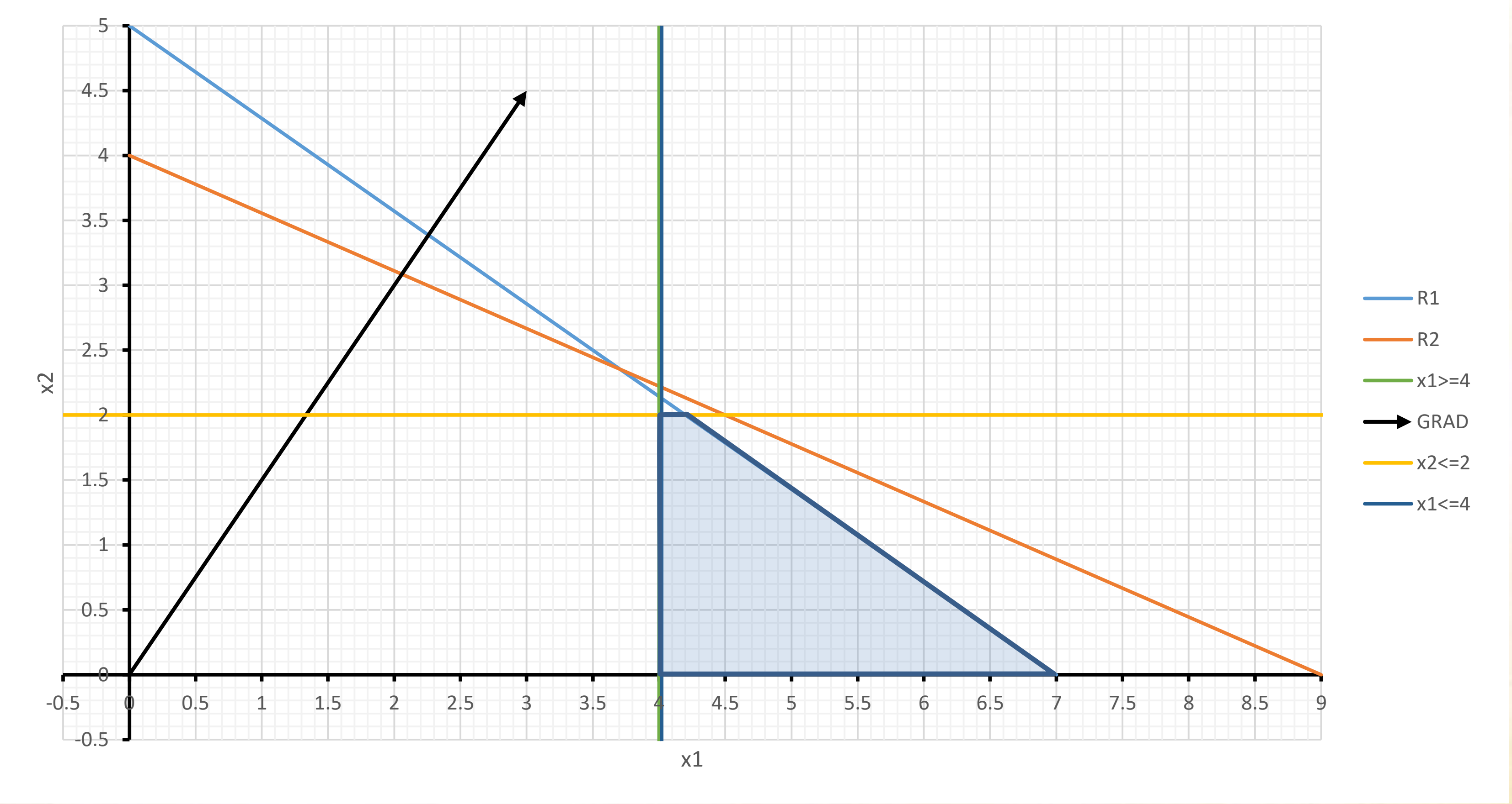


Mejor valor de z*

Se ramifica por P_3

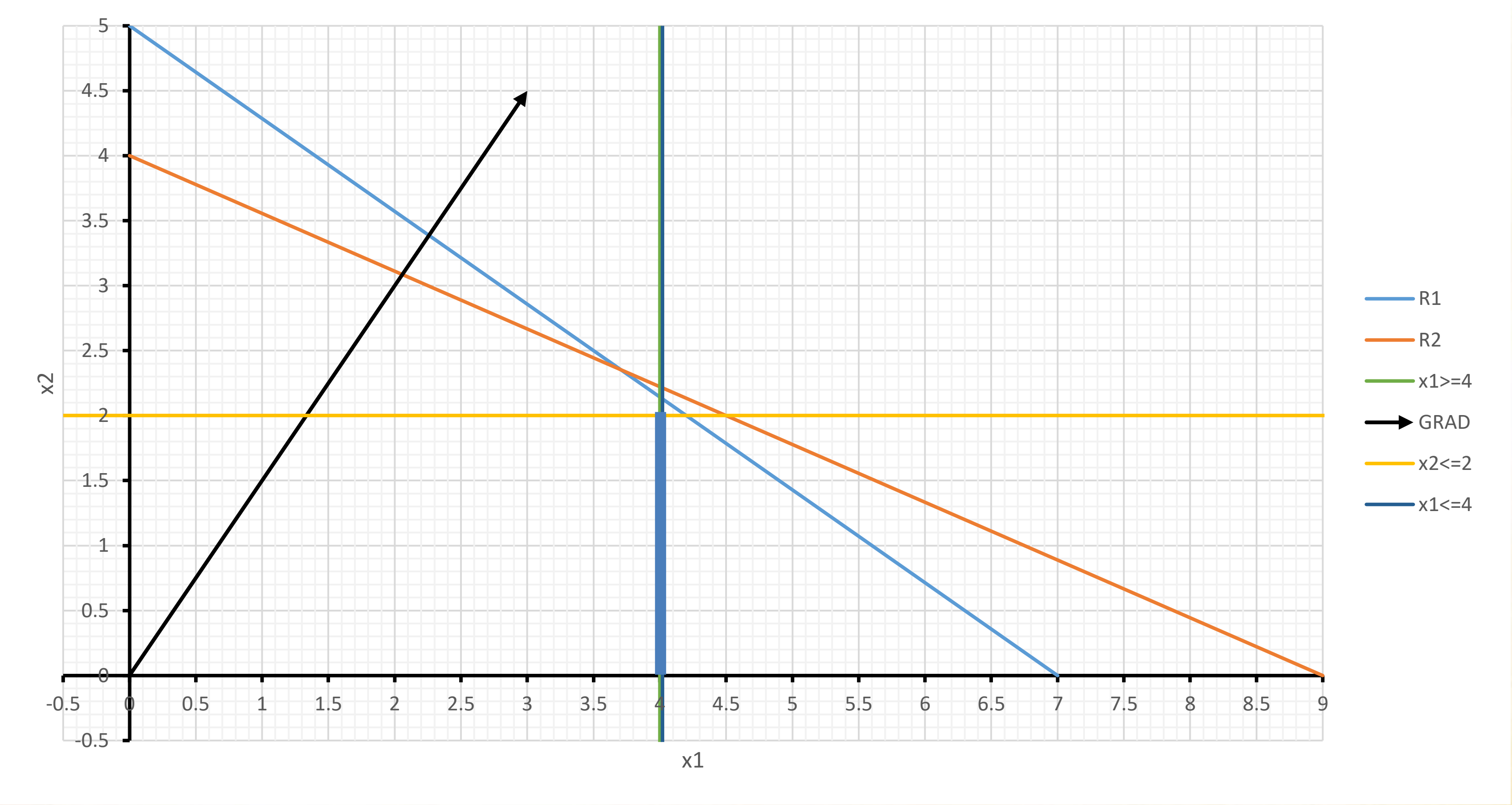

P0
x0*=(3.71, 2.4) z0*=14.47
x1≤ 3
x1 ≥ 4
P1
x1*=(3, 2.67) z1*=14
P2
x2*=(4, 2.14) z2*=14.43
x2≤ 2
x2 ≥ 3
P3
x3*=(4.19, 2) z3*=14.4
P4
Infactible
x1≤ 4
x1 ≥ 5
P5
P6

$P_5 = P_3 + \{ x_1 \leq 4 \}$



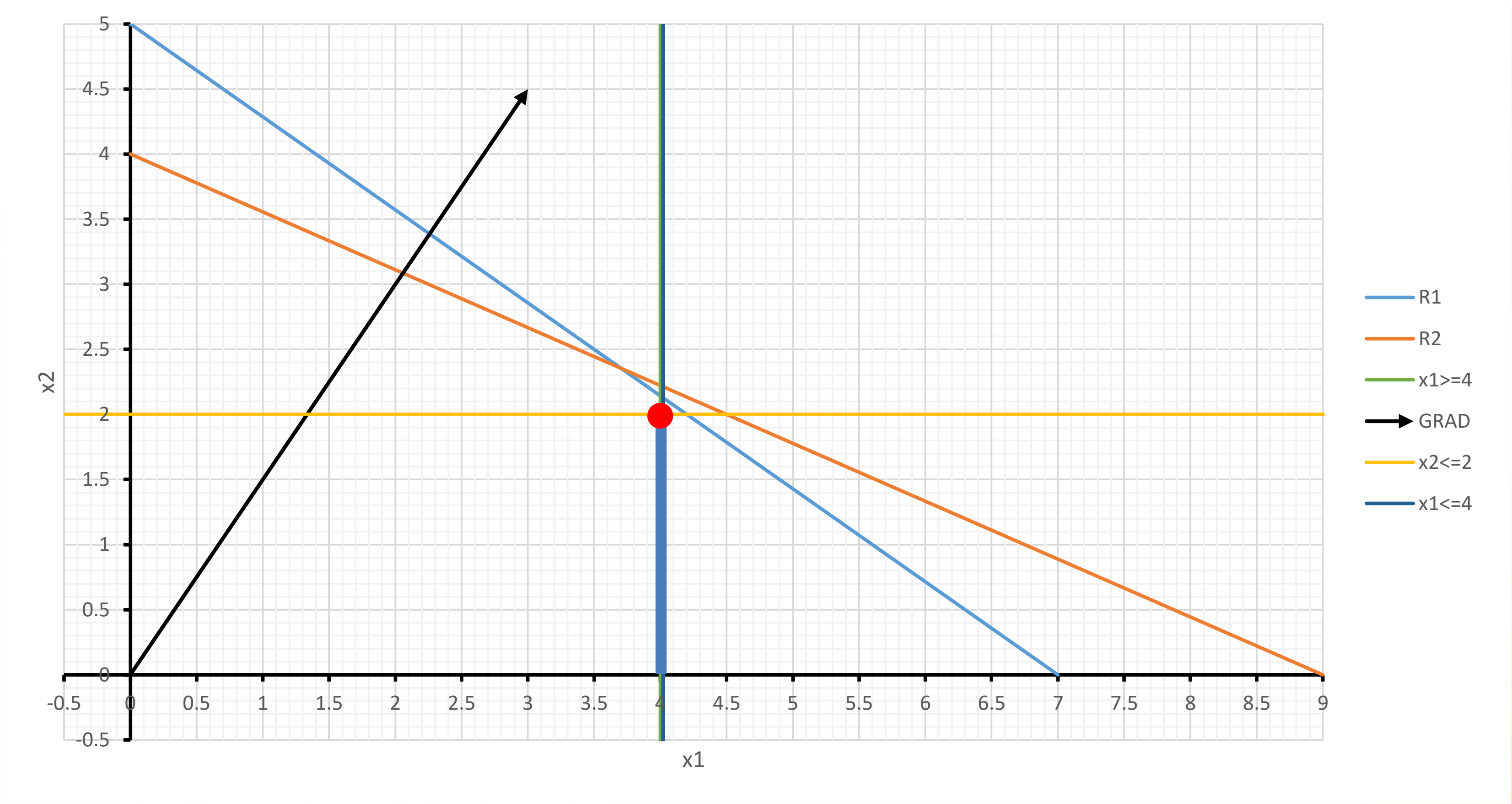
UNIVERSITAS Miguel Hernández

P_5



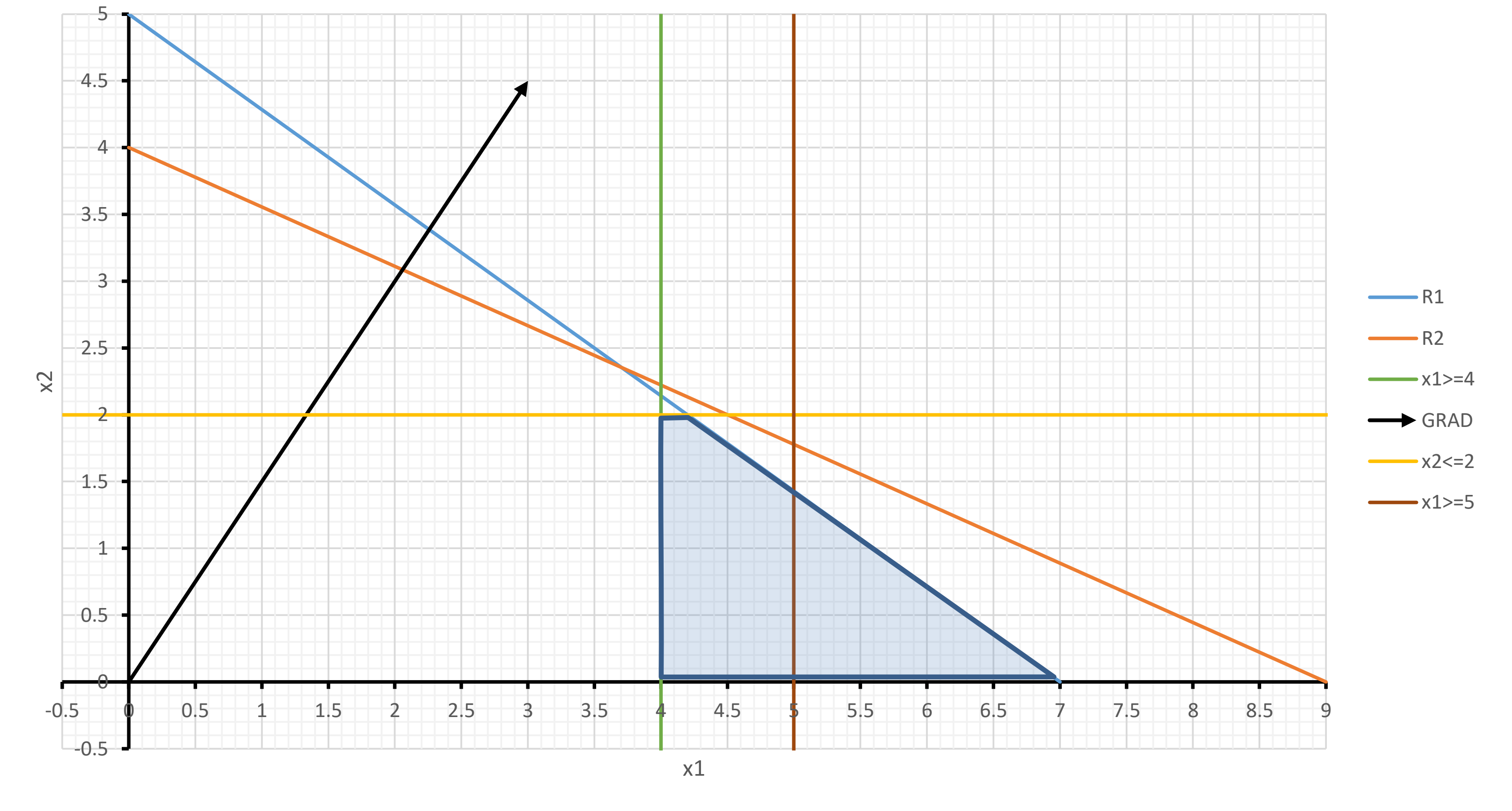
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
x2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
x1
R1
R2
x1>=4
GRAD
x2<=2
x1<=4

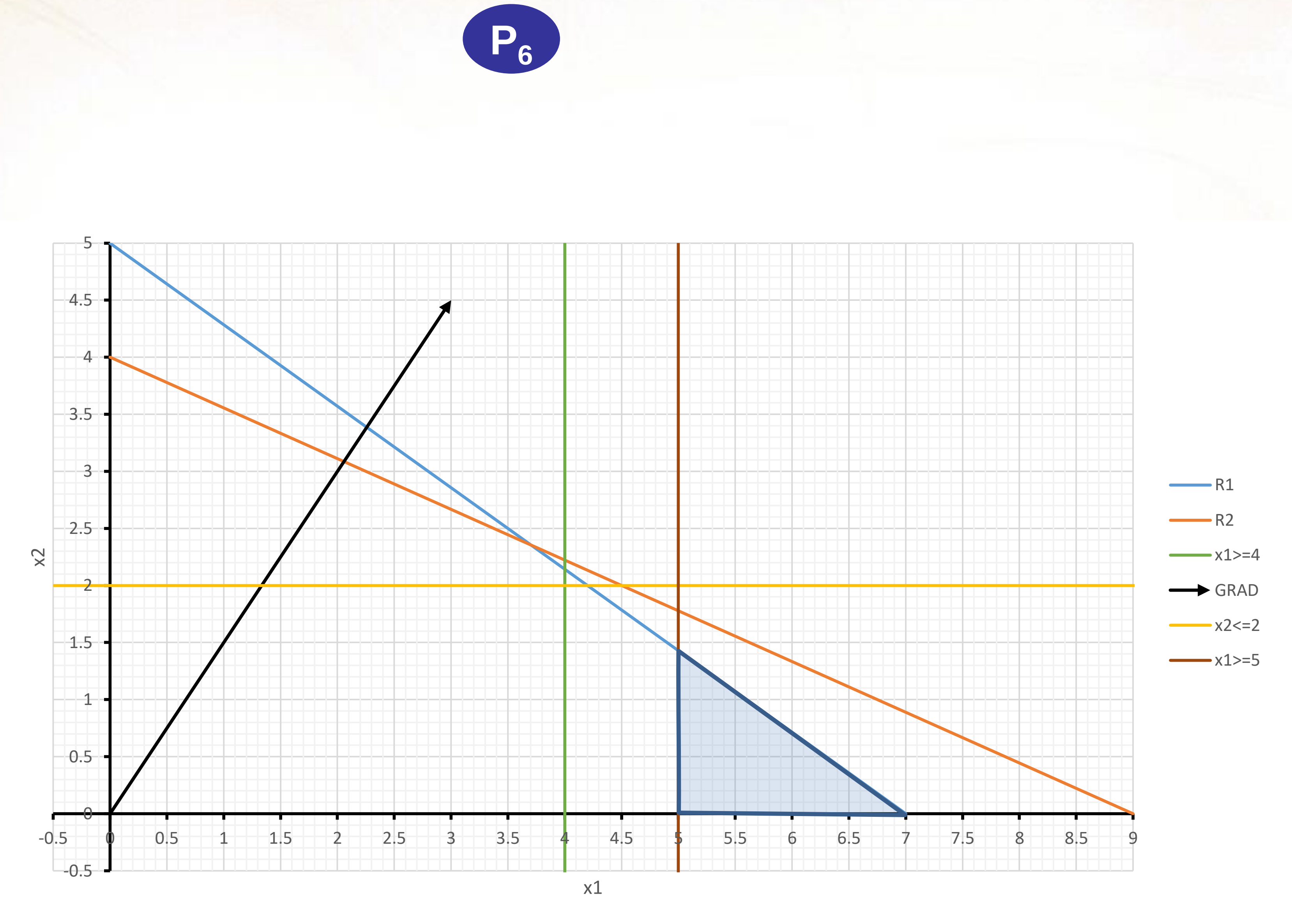
P_5 $x_5^*=(4,\ 2)\ \ z_5^*=14$



UNIVERSITAS Miguel Hernández

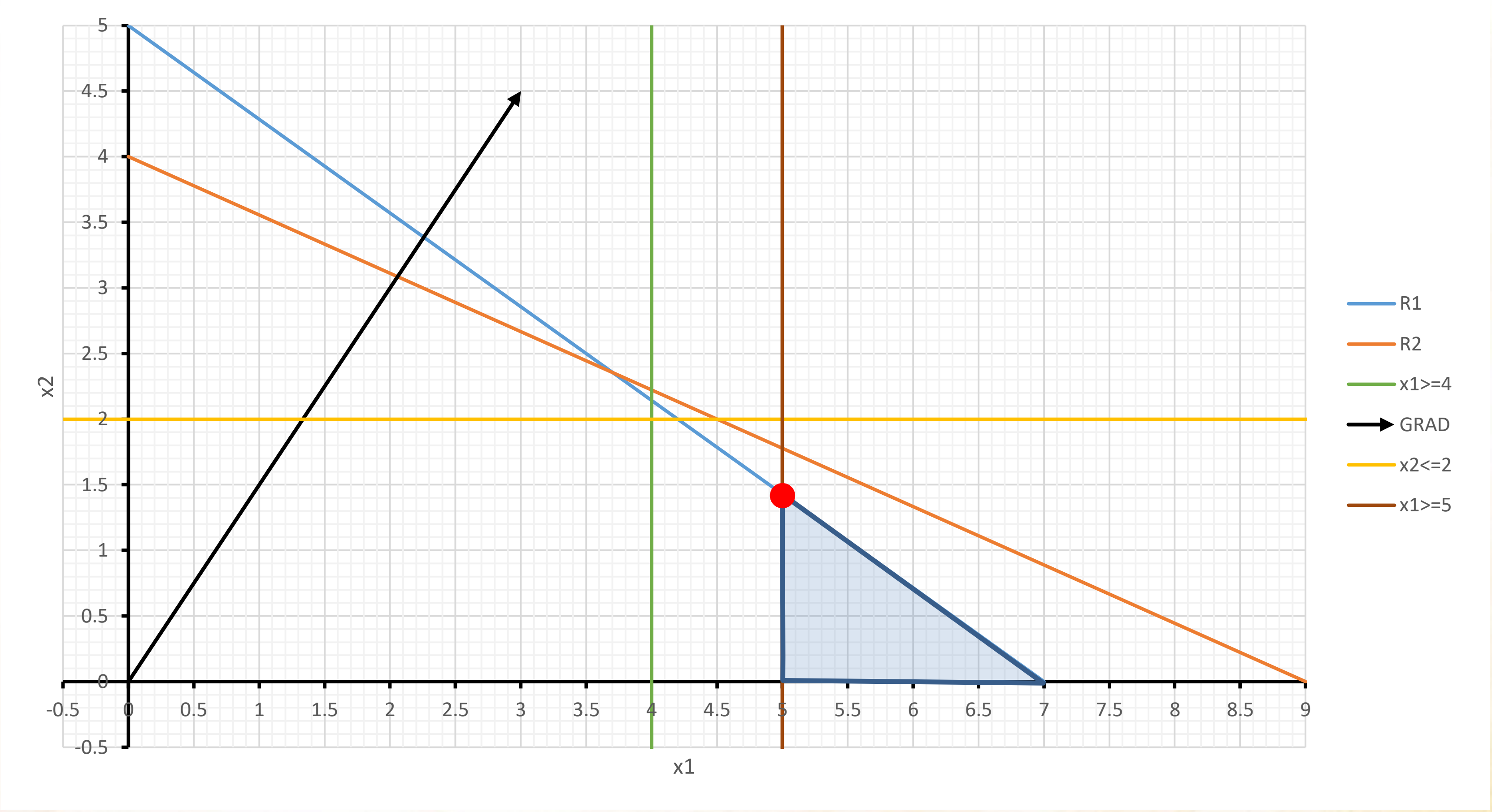
$P_6 = P_3 + \{ x_1 \geq 5 \}$



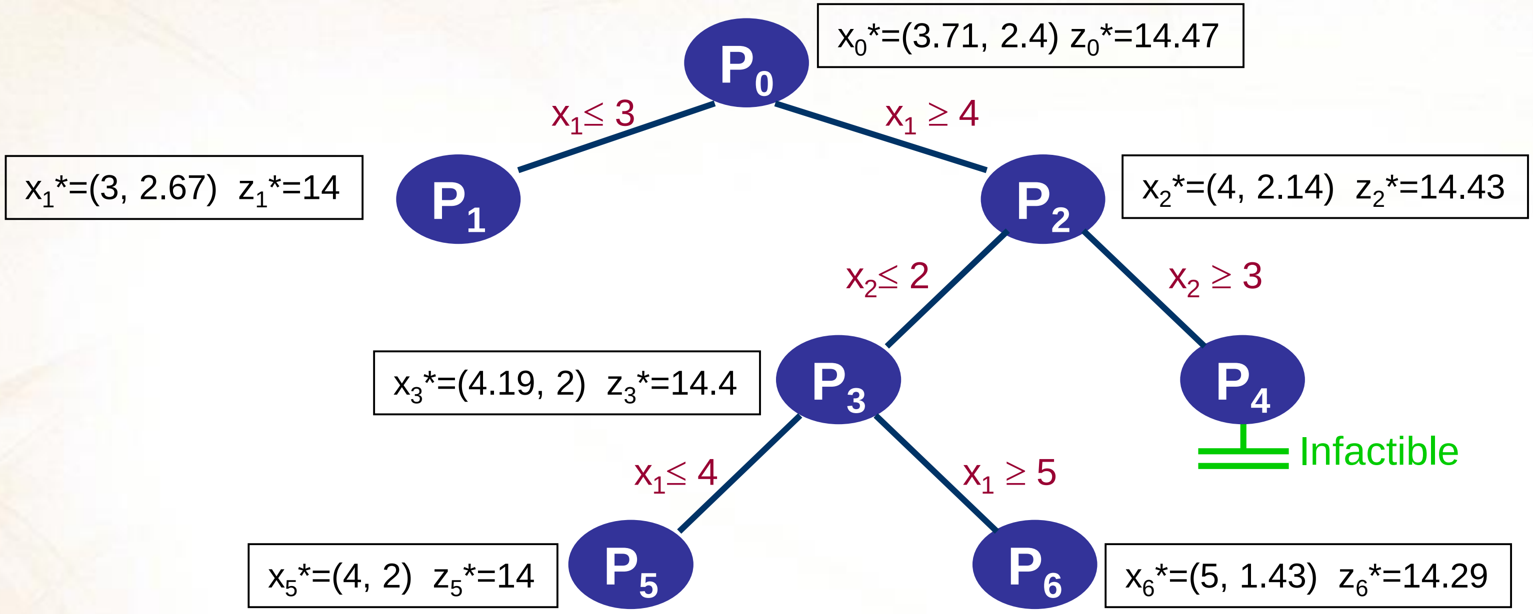

P6
x2
x1
R1
R2
x1>=4
GRAD
x2<=2
x1>=5

P_6

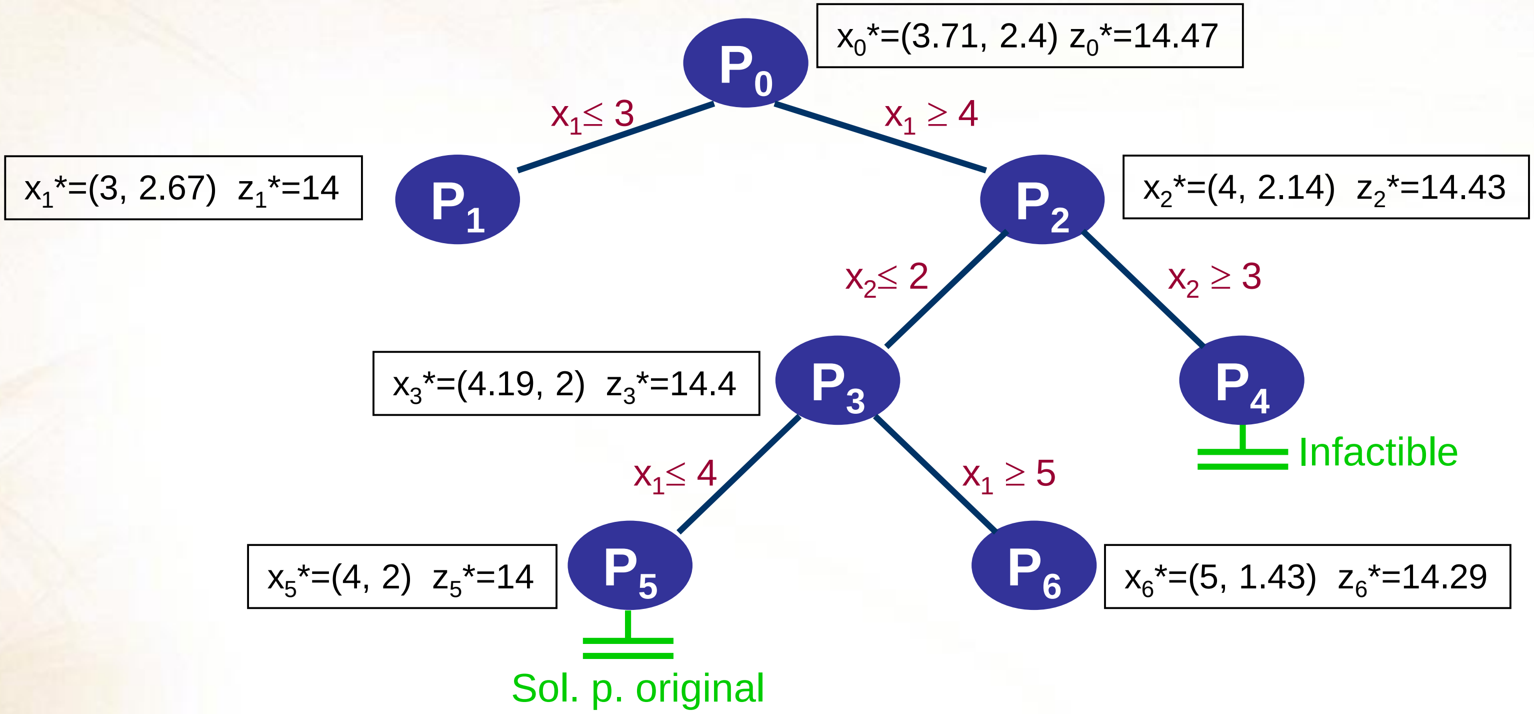
$x_6^*=(5,\ 1.43)\quad z_6^*=14.29$

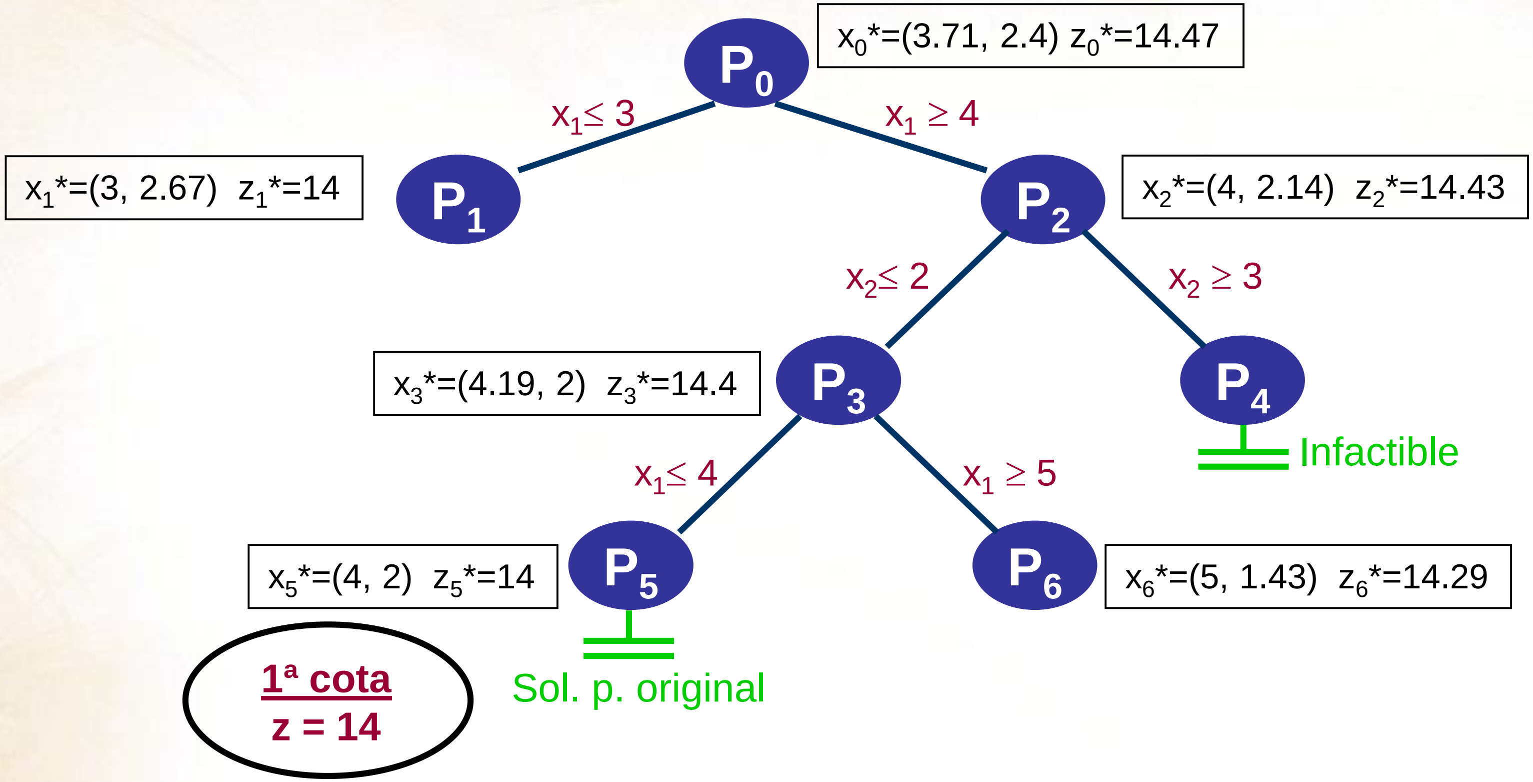


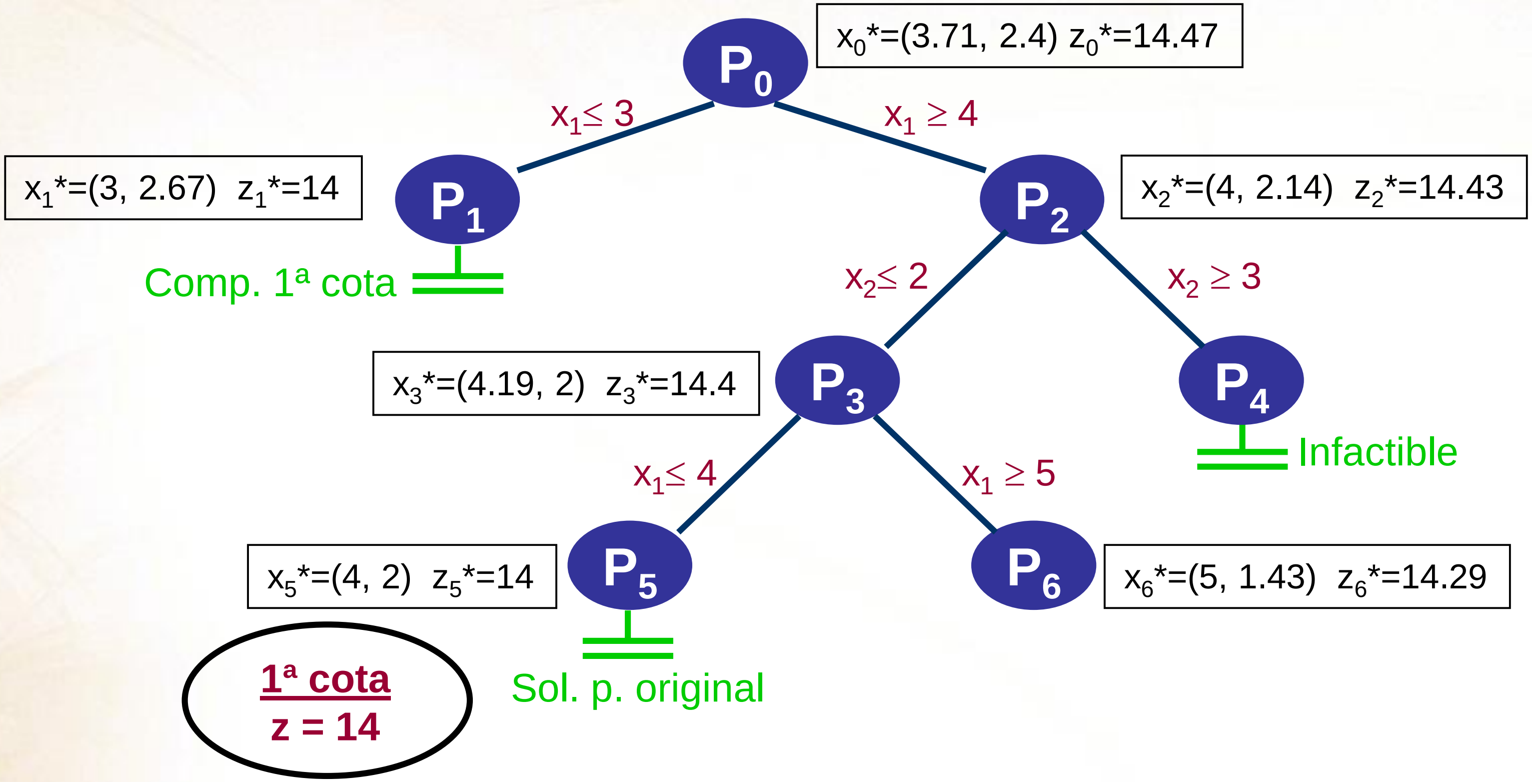
UNIVERSITAS Miguel Hernández



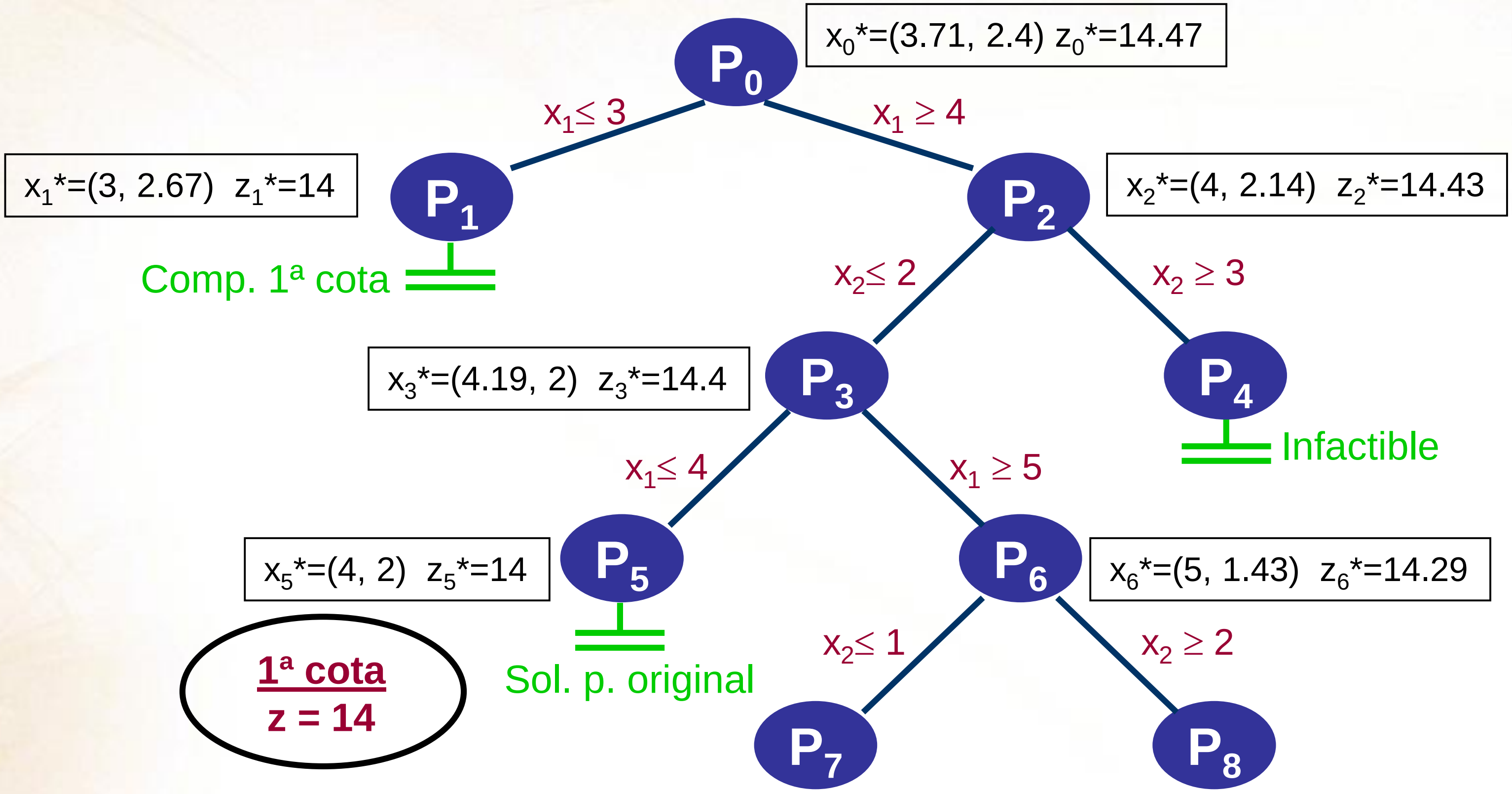
$x_0^*=(3.71, 2.4)$ $z_0^*=14.47$
P_0
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
$x_1^*=(3, 2.67)$ $z_1^*=14$
P_1
P_2
$x_2^*=(4, 2.14)$ $z_2^*=14.43$
$x_2 \leq 2$
$x_2 \geq 3$
$x_3^*=(4.19, 2)$ $z_3^*=14.4$
P_3
P_4
Infactible
$x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 5$
$x_5^*=(4, 2)$ $z_5^*=14$
P_5
P_6
$x_6^*=(5, 1.43)$ $z_6^*=14.29$


P0
x0*=(3.71, 2.4) z0*=14.47
x1≤ 3
x1 ≥ 4
P1
x1*=(3, 2.67) z1*=14
P2
x2*=(4, 2.14) z2*=14.43
x2≤ 2
x2 ≥ 3
P3
x3*=(4.19, 2) z3*=14.4
P4
Infactible
x1≤ 4
x1 ≥ 5
P5
x5*=(4, 2) z5*=14
P6
x6*=(5, 1.43) z6*=14.29
Sol. p. original

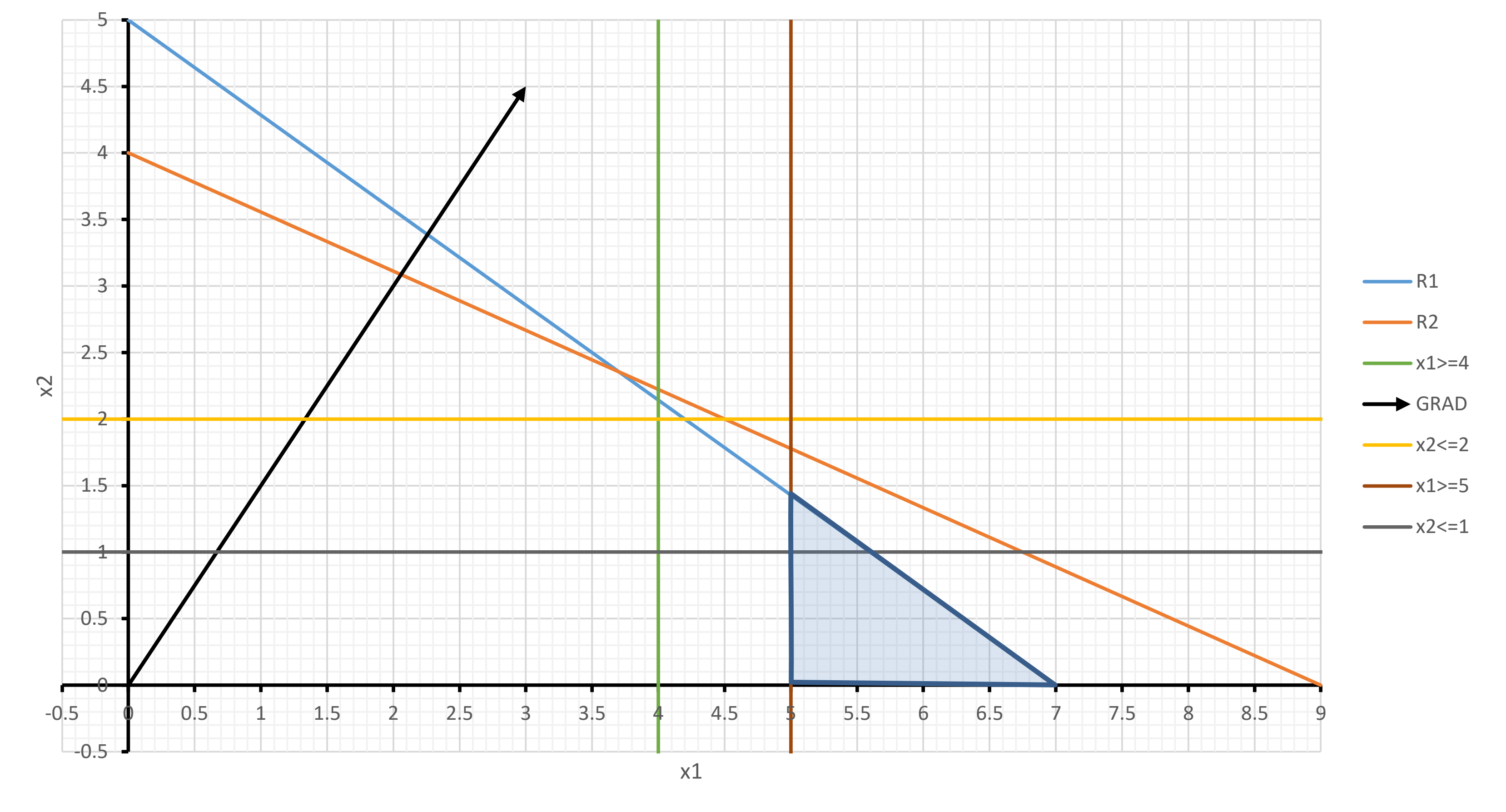

P_0
$x_0^*=(3.71, 2.4)$ $z_0^*=14.47$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
P_1
$x_1^*=(3, 2.67)$ $z_1^*=14$
P_2
$x_2^*=(4, 2.14)$ $z_2^*=14.43$
$x_2 \leq 2$
$x_2 \geq 3$
P_3
$x_3^*=(4.19, 2)$ $z_3^*=14.4$
P_4
Infactible
$x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 5$
P_5
$x_5^*=(4, 2)$ $z_5^*=14$
P_6
$x_6^*=(5, 1.43)$ $z_6^*=14.29$
Sol. p. original
1ª cota
z = 14



UNIVERSITAS Miguel Hernández

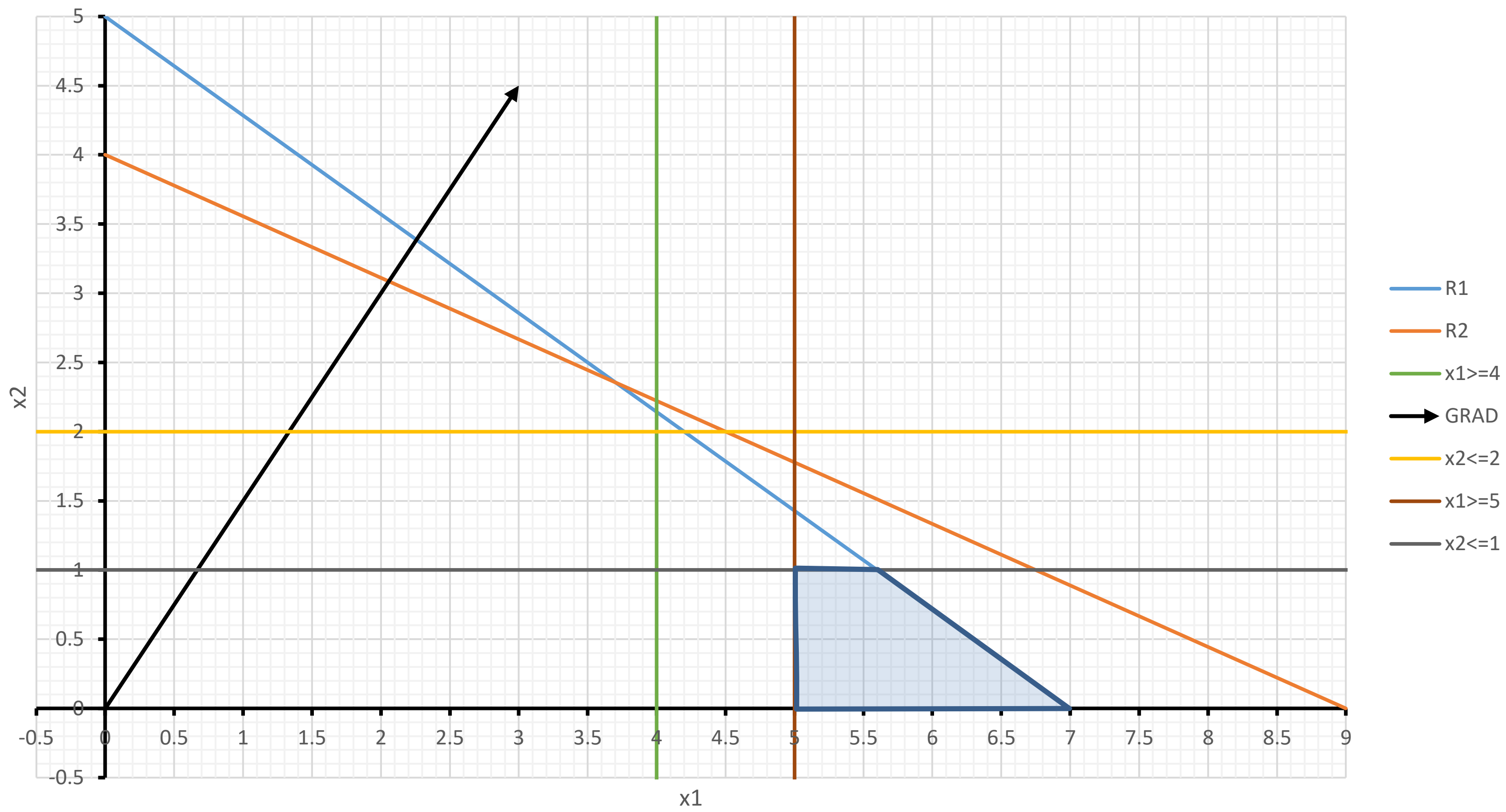

P0
x0*=(3.71, 2.4) z0*=14.47
x1≤ 3
x1 ≥ 4
P1
x1*=(3, 2.67) z1*=14
Comp. 1ª cota
P2
x2*=(4, 2.14) z2*=14.43
x2≤ 2
x2 ≥ 3
P3
x3*=(4.19, 2) z3*=14.4
P4
Infactible
x1≤ 4
x1 ≥ 5
P5
x5*=(4, 2) z5*=14
Sol. p. original
P6
x6*=(5, 1.43) z6*=14.29
x2≤ 1
x2 ≥ 2
P7
P8
1ª cota
z = 14

$P_7 = P_6 + \{ x_2 \leq 1 \}$



5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
x2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
x1
R1
R2
x1>=4
GRAD
x2<=2
x1>=5
x2<=1

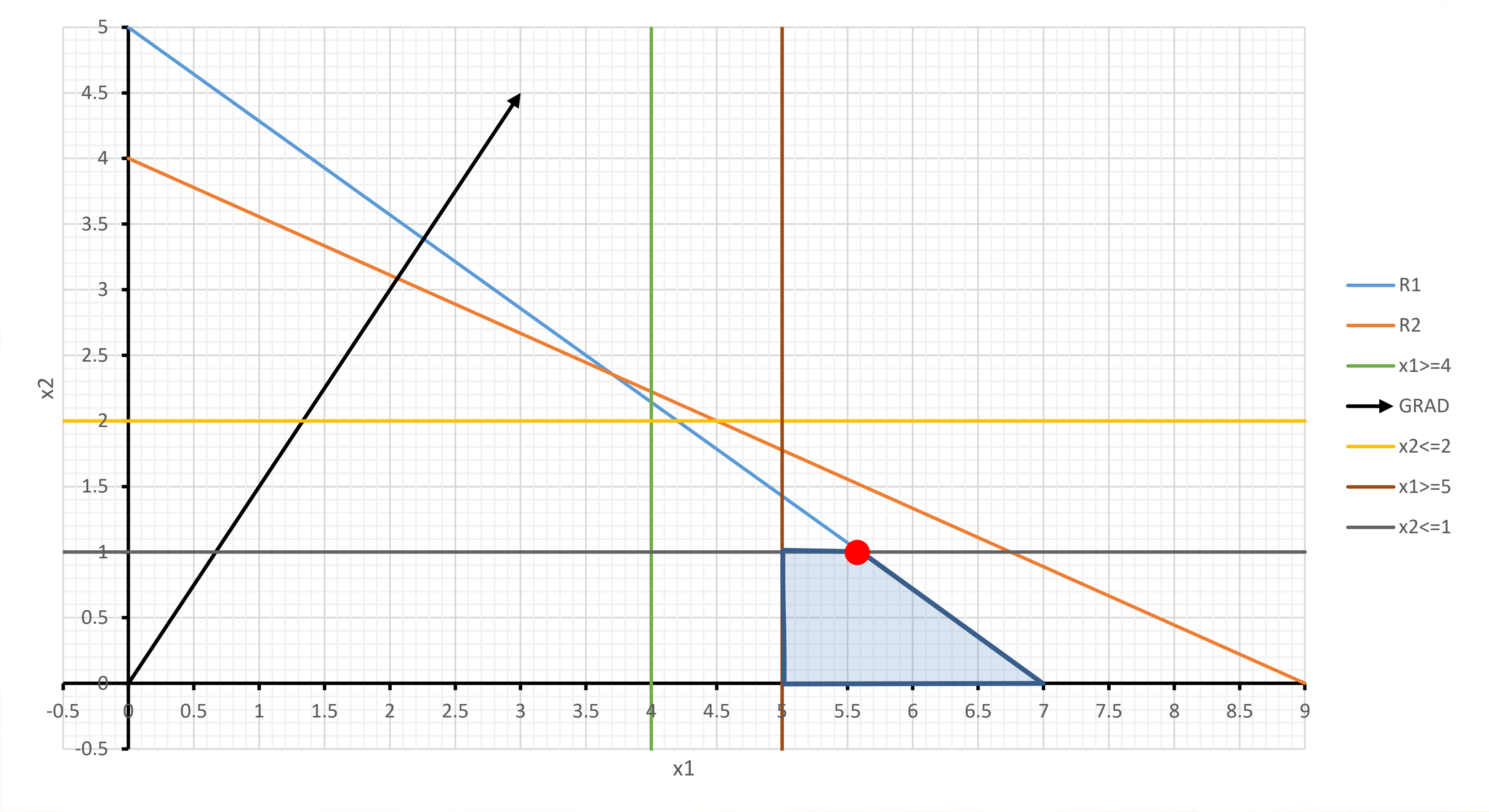
P_7



5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
x2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
x1
R1
R2
x1>=4
GRAD
x2<=2
x1>=5
x2<=1

P$_7$

$x_7^*=(5.6,\ 1)\quad z_7^*=14.2$

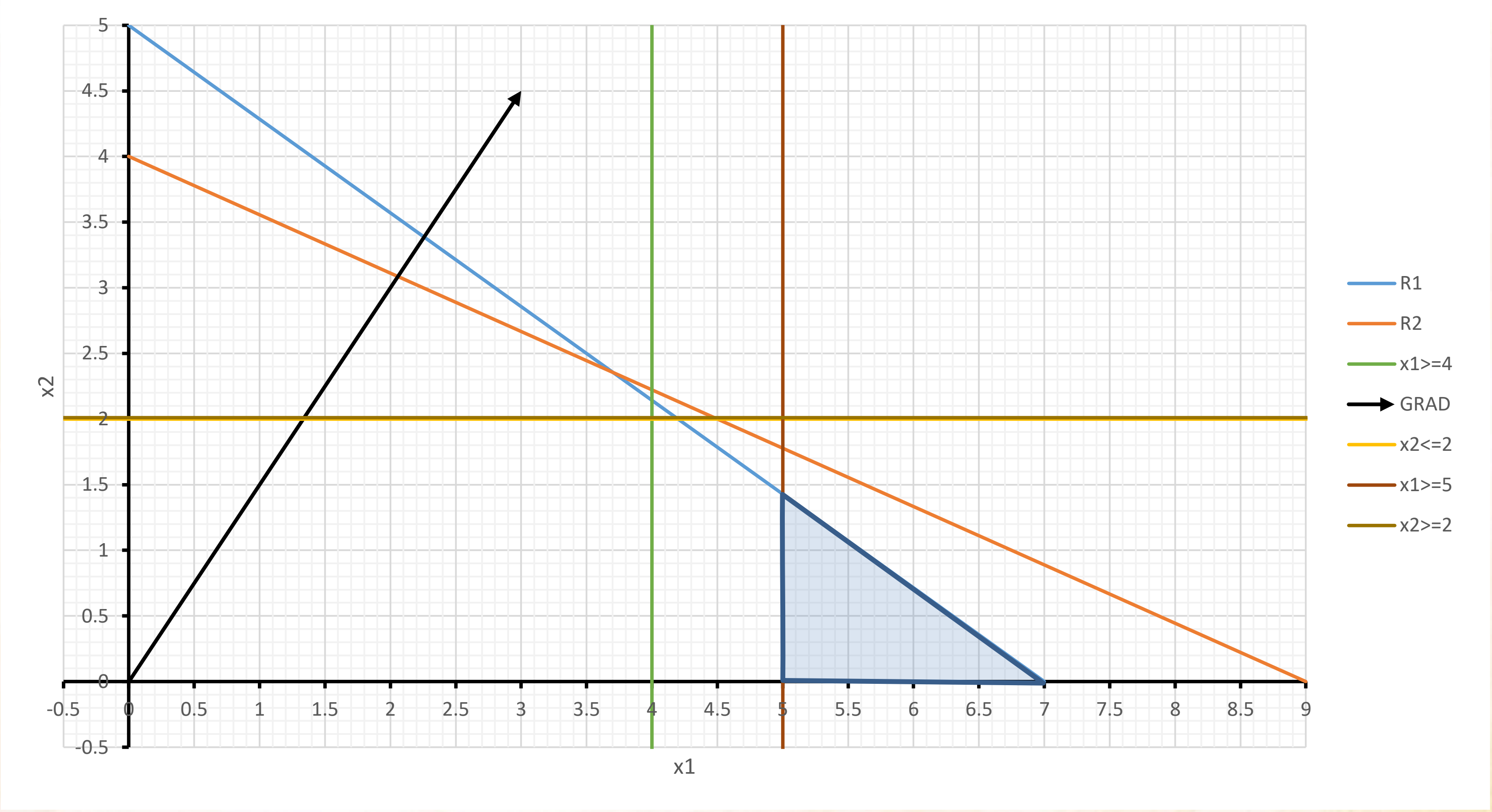


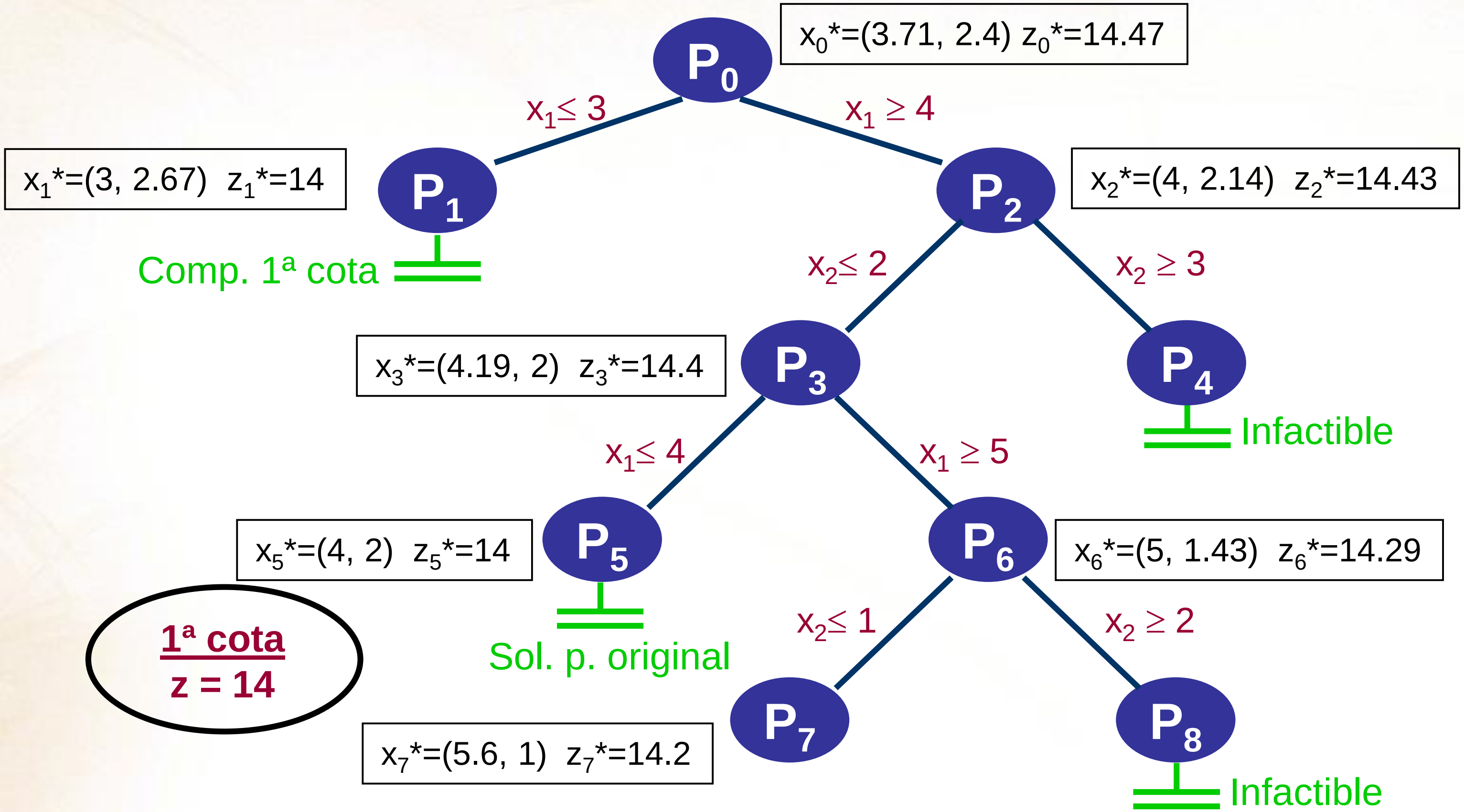
UNIVERSITAS Miguel Hernández

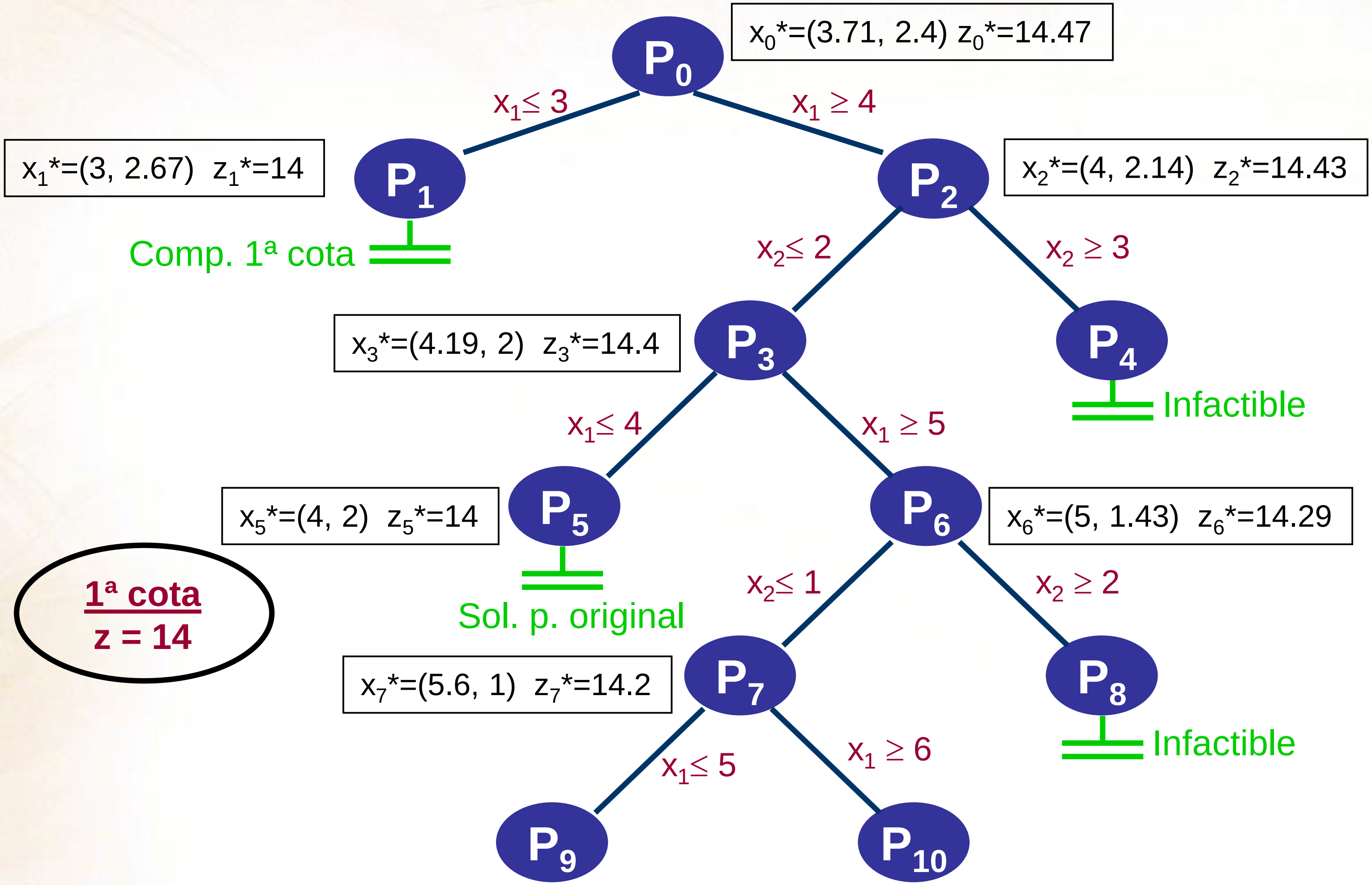
$$P_8 = P_6 + \{ x_2 \geq 2 \}$$

5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
x2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
x1
R1
R2
x1>=4
GRAD
x2<=2
x1>=5
x2>=2

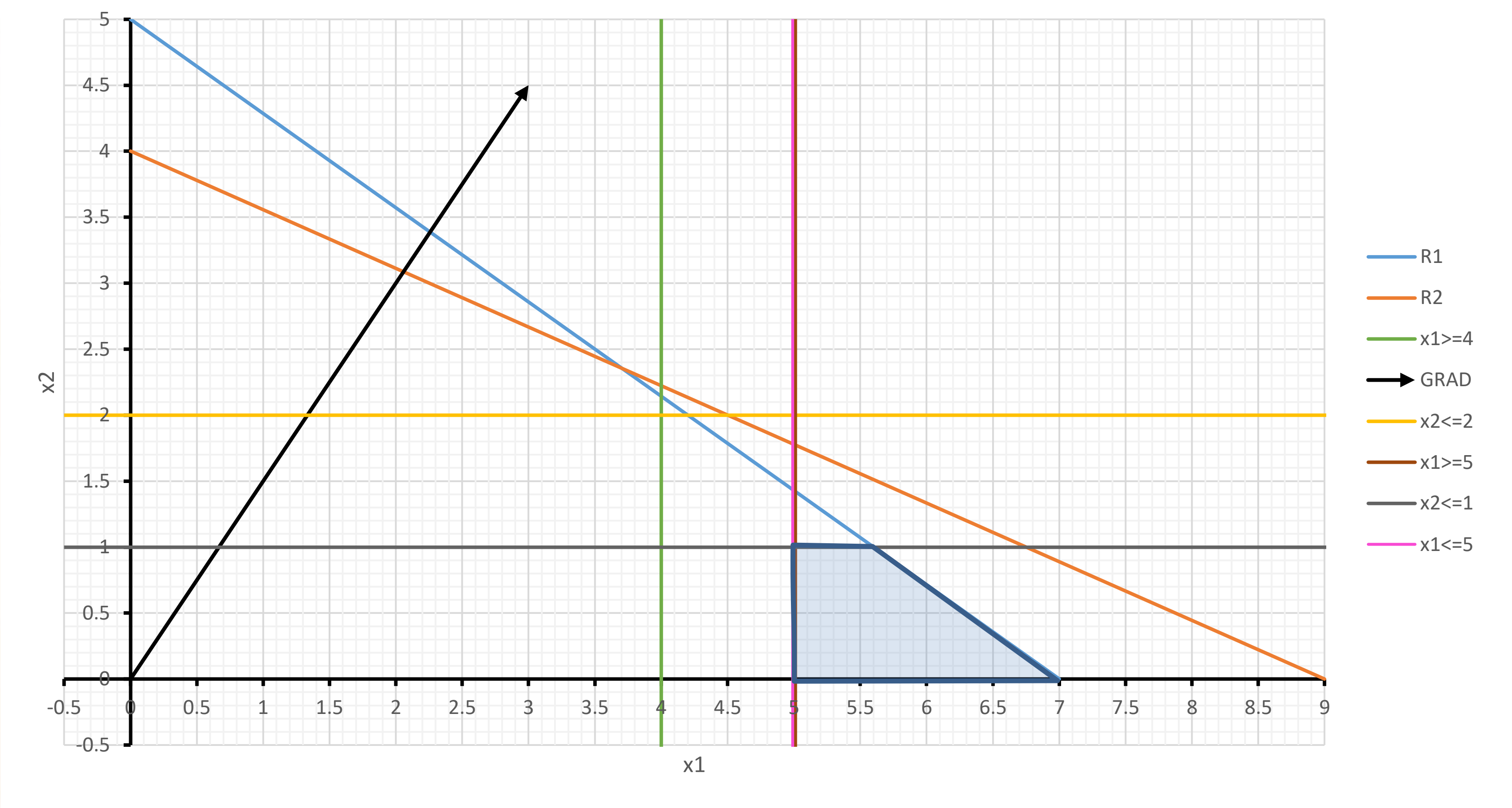
P_8 Infactible




P0
x0*=(3.71, 2.4) z0*=14.47
x1≤ 3
x1 ≥ 4
P1
x1*=(3, 2.67) z1*=14
Comp. 1ª cota
P2
x2*=(4, 2.14) z2*=14.43
x2≤ 2
x2 ≥ 3
P3
x3*=(4.19, 2) z3*=14.4
P4
Infactible
x1≤ 4
x1 ≥ 5
P5
x5*=(4, 2) z5*=14
Sol. p. original
P6
x6*=(5, 1.43) z6*=14.29
1ª cota
z = 14
x2≤ 1
x2 ≥ 2
P7
x7*=(5.6, 1) z7*=14.2
P8
Infactible

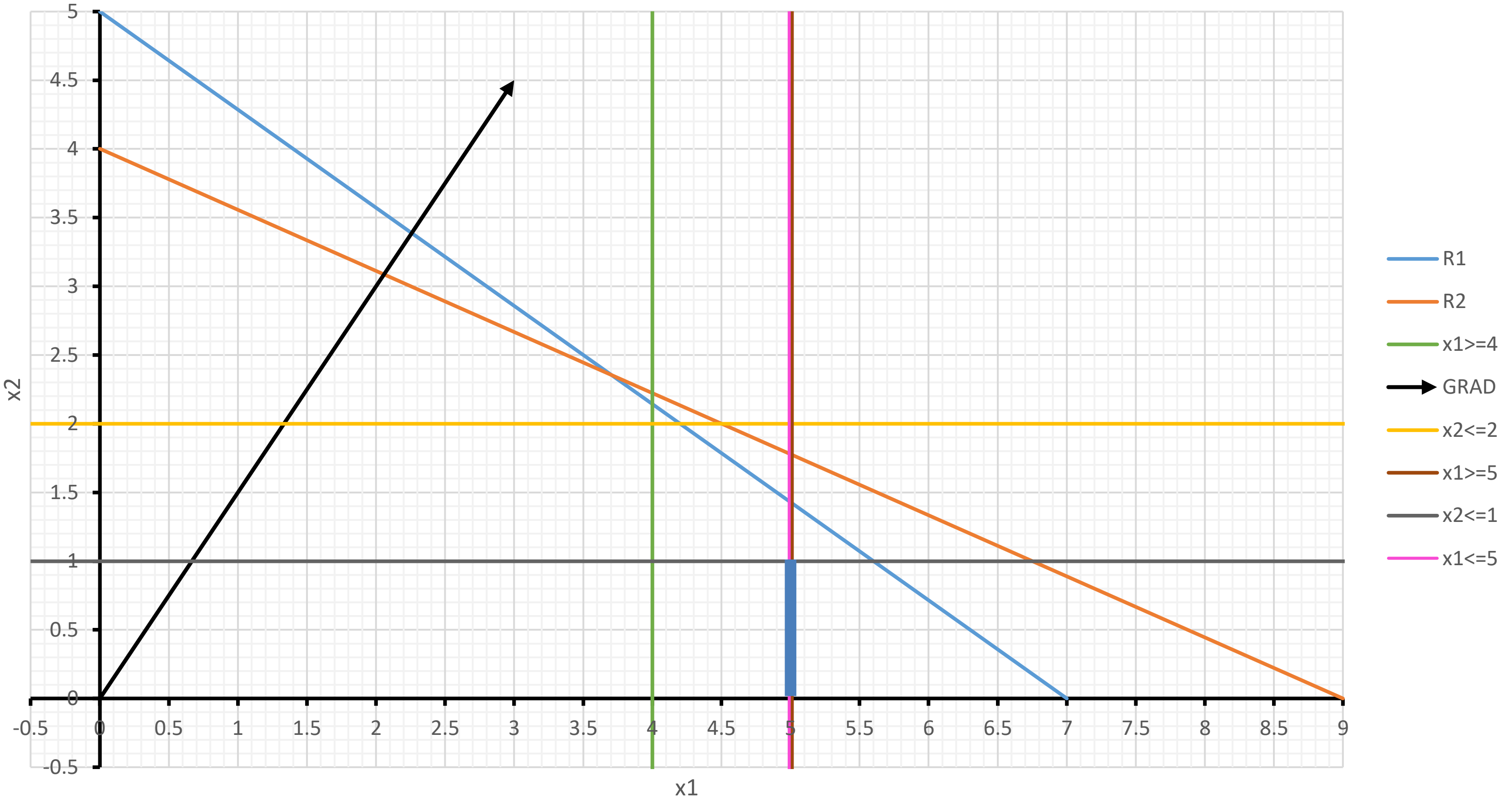

P0
x0*=(3.71, 2.4) z0*=14.47
x1≤ 3
x1 ≥ 4
P1
x1*=(3, 2.67) z1*=14
Comp. 1ª cota
P2
x2*=(4, 2.14) z2*=14.43
x2≤ 2
x2 ≥ 3
P3
x3*=(4.19, 2) z3*=14.4
P4
Infactible
x1≤ 4
x1 ≥ 5
P5
x5*=(4, 2) z5*=14
Sol. p. original
P6
x6*=(5, 1.43) z6*=14.29
1ª cota
z = 14
x2≤ 1
x2 ≥ 2
P7
x7*=(5.6, 1) z7*=14.2
P8
Infactible
x1≤ 5
x1 ≥ 6
P9
P10

$$P_9 = P_7 + \{ x_1 \leq 5 \}$$



UNIVERSITAS Miguel Hernández

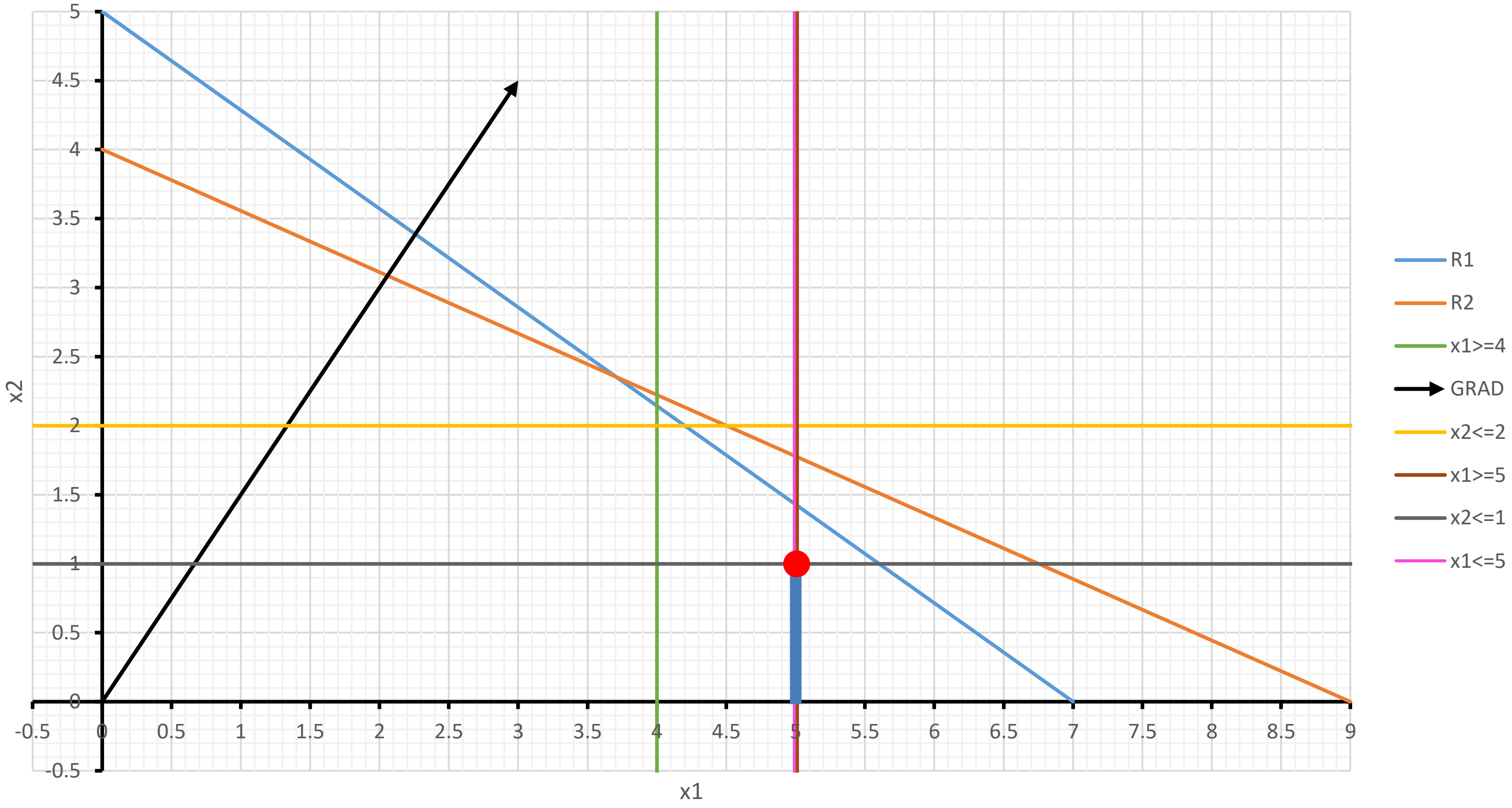
P_9



UNIVERSITAS Miguel Hernández

P9

$x_9^*=(5, 1)$ $z_9^*=13$

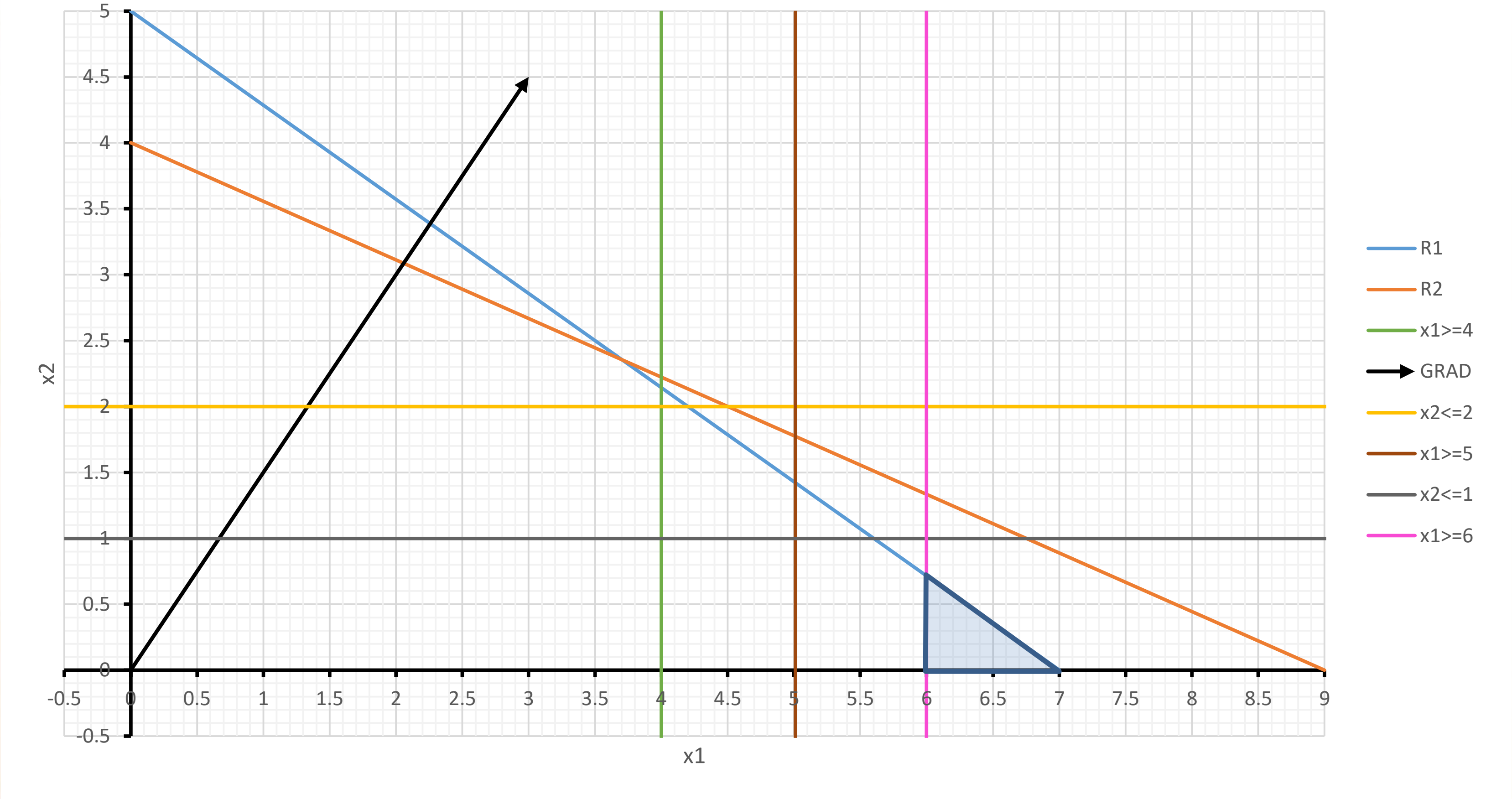


UNIVERSITAS Miguel Hernández

$P_{10} = P_7 + \{ x_1 \geq 6 \}$

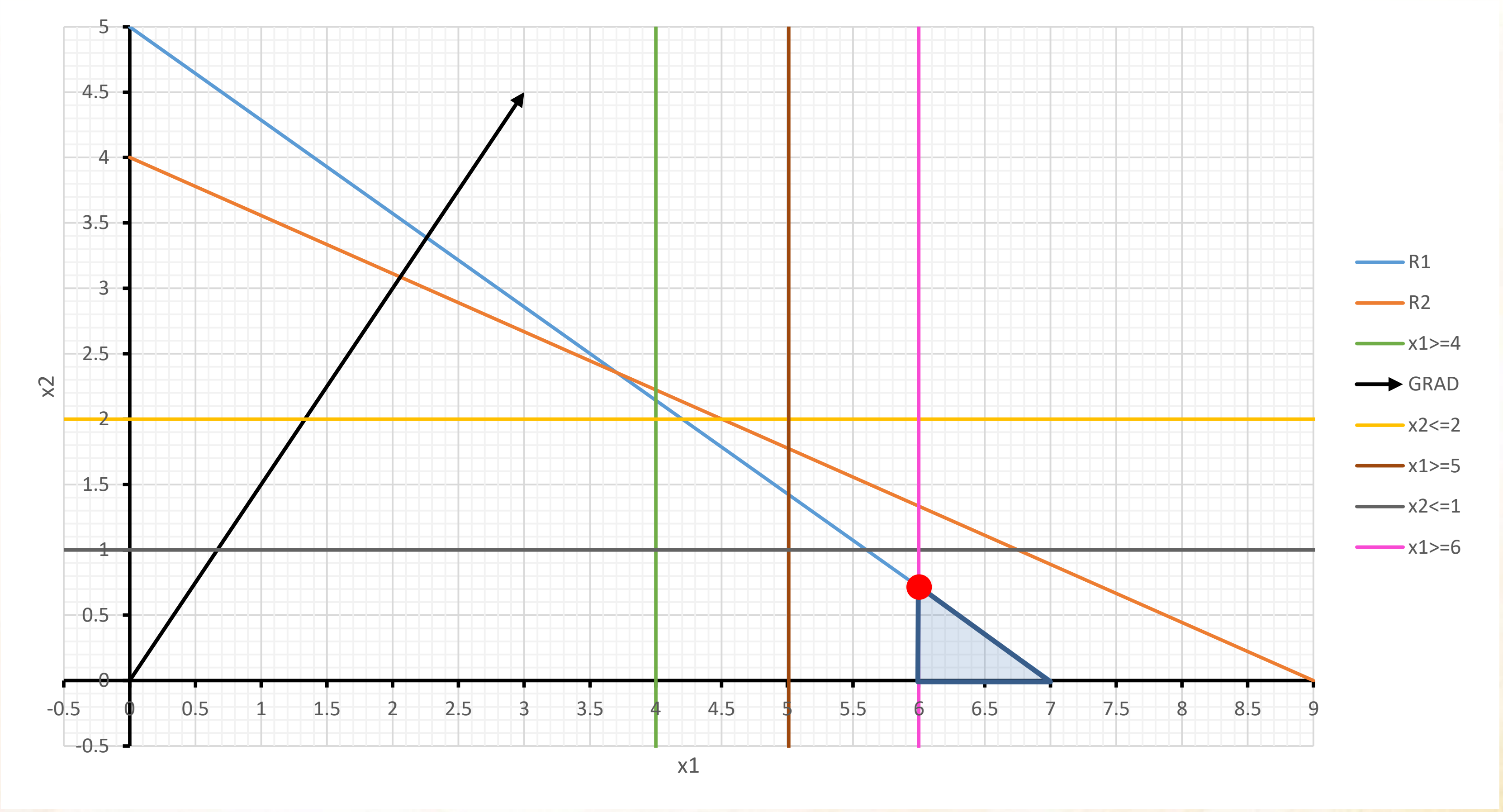
UNIVERSITAS Miguel Hernández

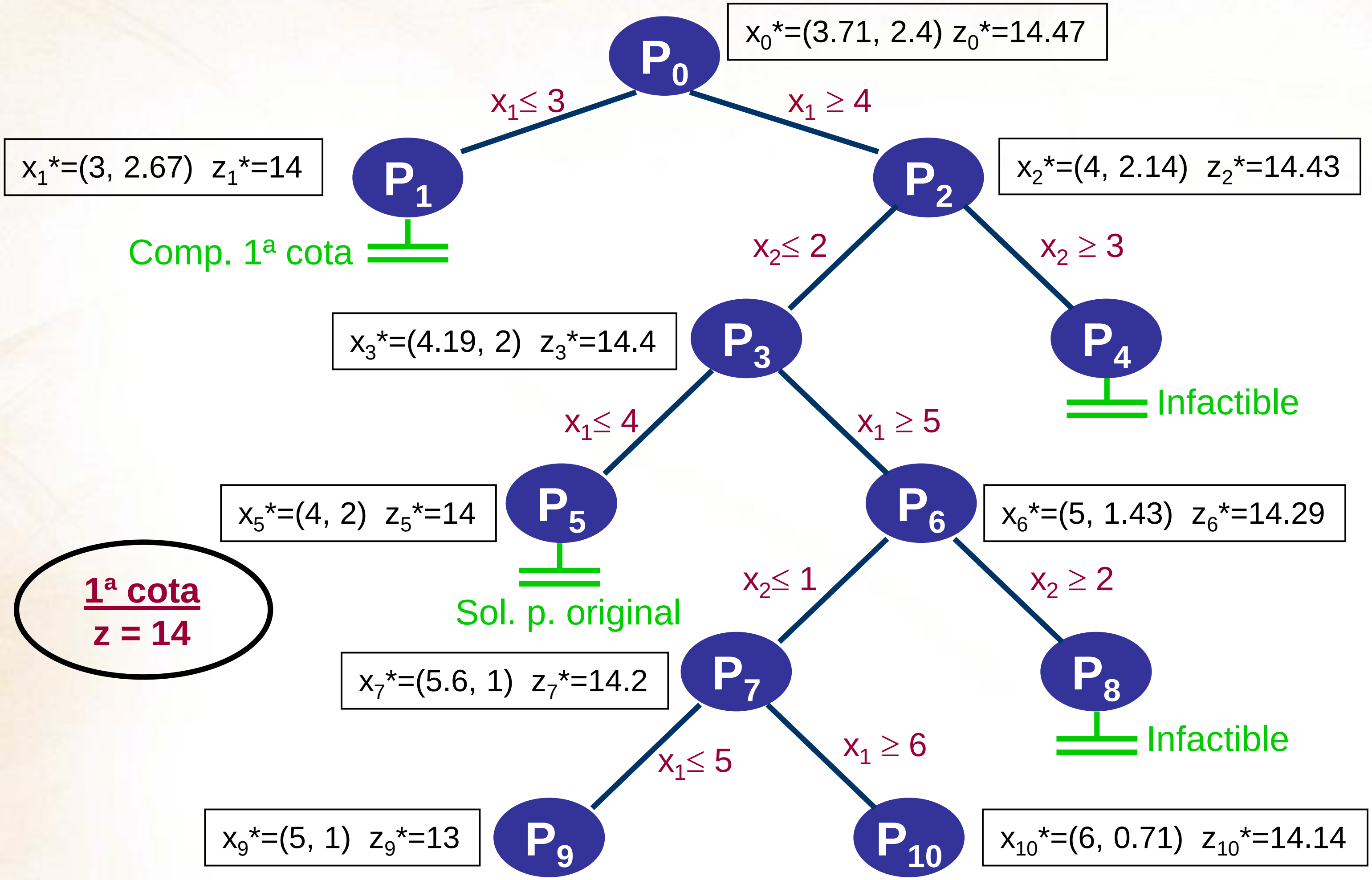
P_{10}

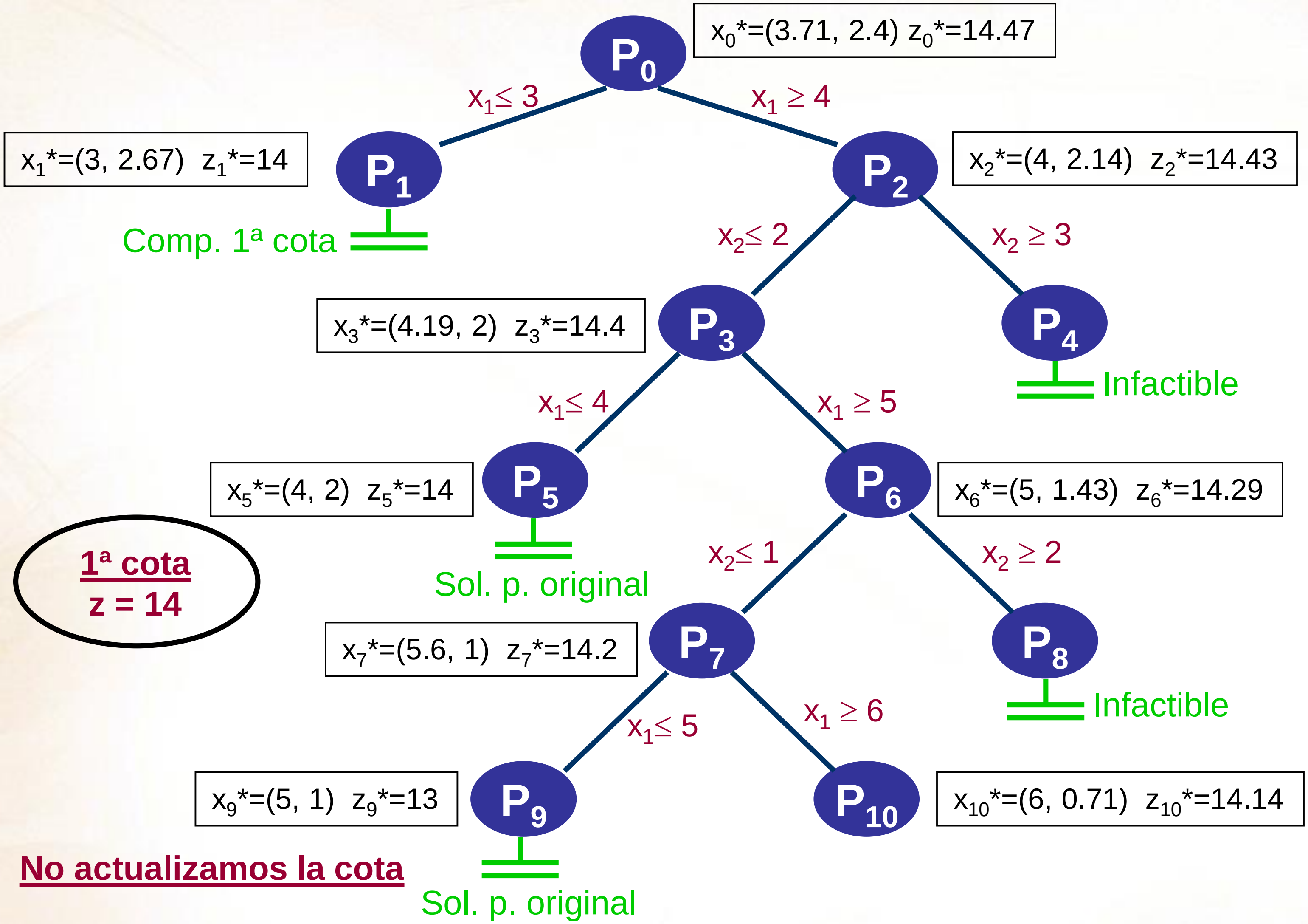


P10

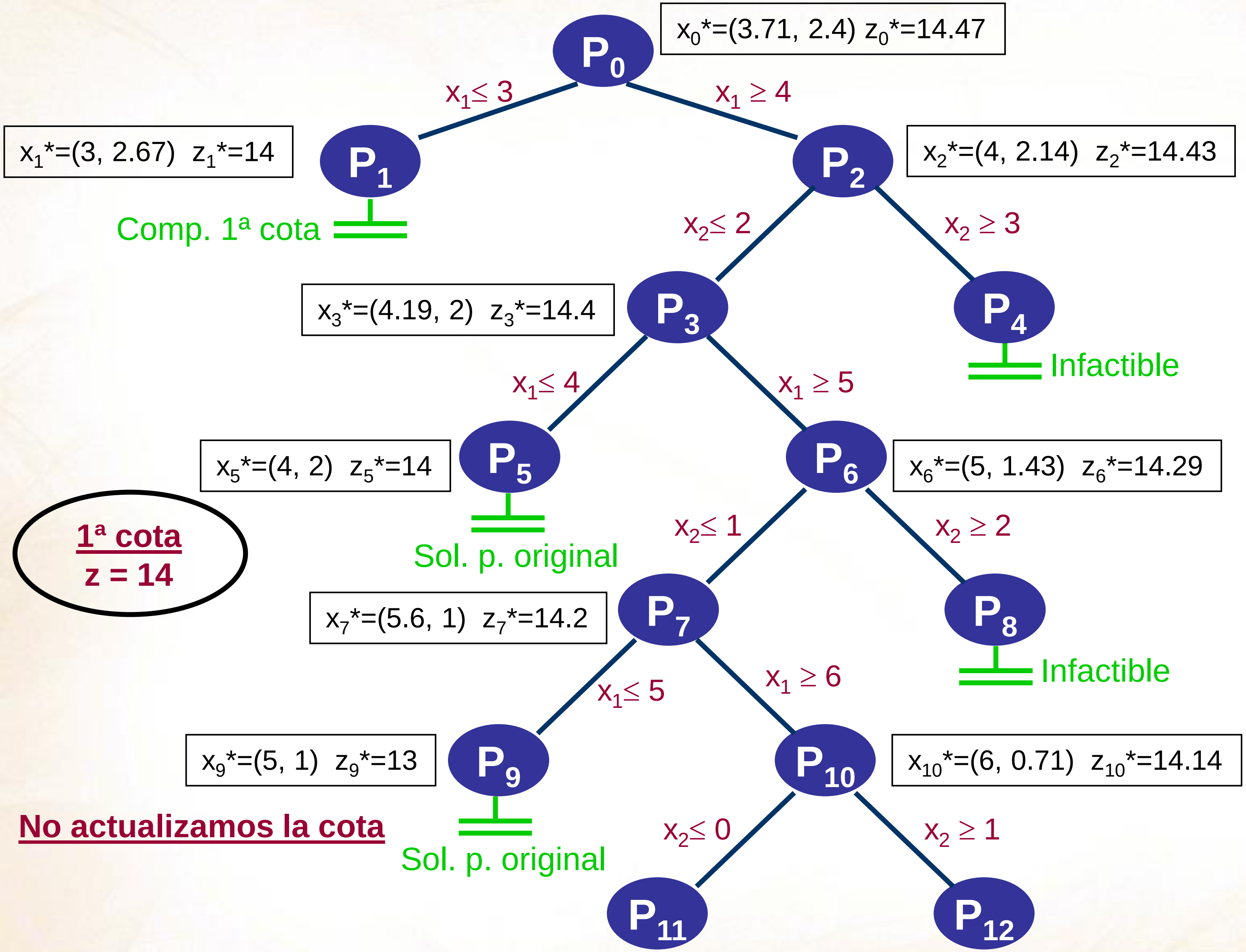
$x_{10}^{*}=(6,\ 0.71)\quad z_{10}^{*}=14.14$




P0
x0*=(3.71, 2.4) z0*=14.47
x1≤ 3
x1 ≥ 4
P1
x1*=(3, 2.67) z1*=14
Comp. 1ª cota
P2
x2*=(4, 2.14) z2*=14.43
x2≤ 2
x2 ≥ 3
P3
x3*=(4.19, 2) z3*=14.4
P4
Infactible
x1≤ 4
x1 ≥ 5
P5
x5*=(4, 2) z5*=14
Sol. p. original
P6
x6*=(5, 1.43) z6*=14.29
x2≤ 1
x2 ≥ 2
1ª cota
z = 14
P7
x7*=(5.6, 1) z7*=14.2
P8
Infactible
x1≤ 5
x1 ≥ 6
P9
x9*=(5, 1) z9*=13
P10
x10*=(6, 0.71) z10*=14.14

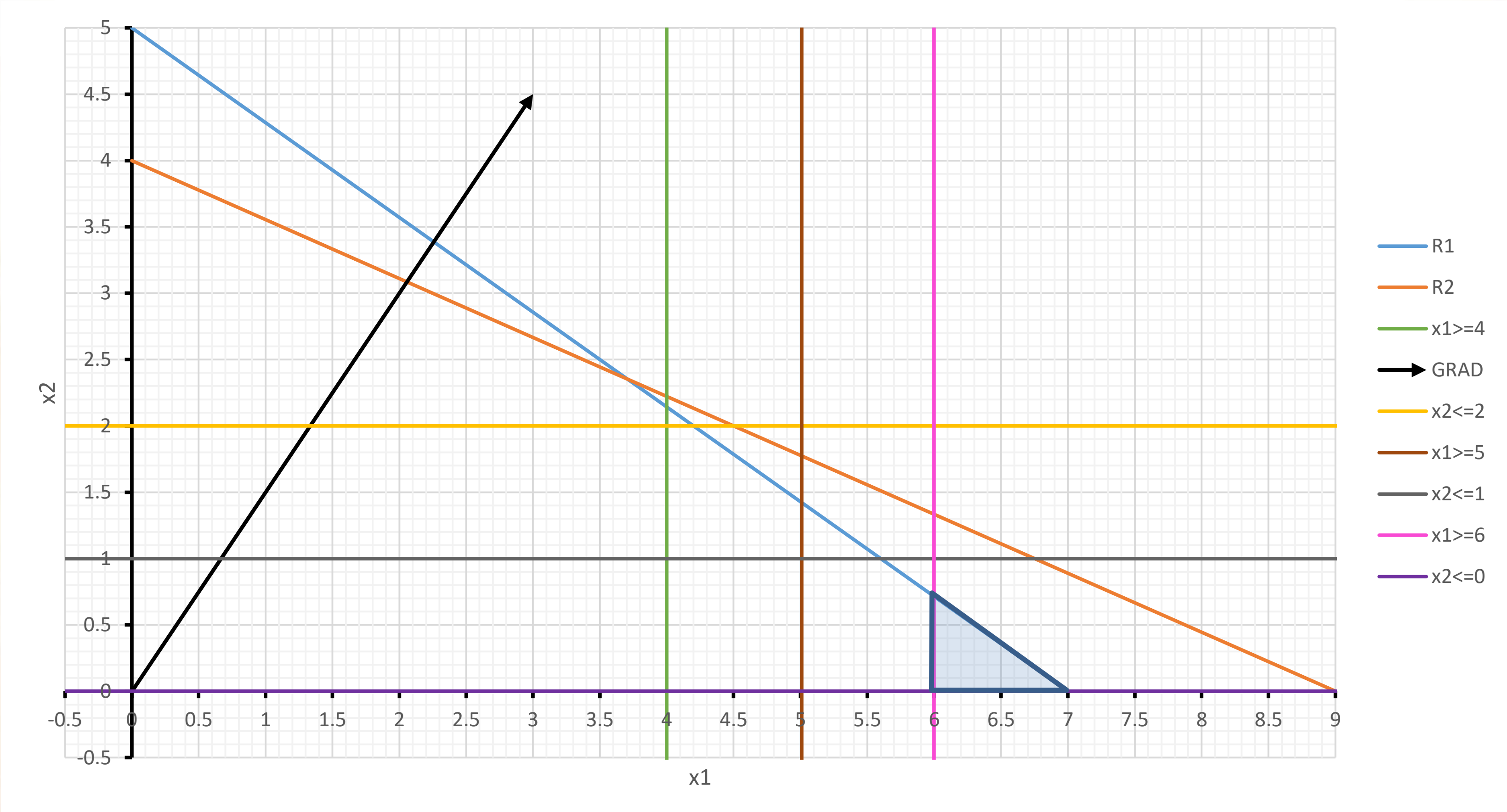


P0
x0*=(3.71, 2.4) z0*=14.47
x1≤ 3
x1 ≥ 4
x1*=(3, 2.67) z1*=14
P1
Comp. 1ª cota
P2
x2*=(4, 2.14) z2*=14.43
x2≤ 2
x2 ≥ 3
x3*=(4.19, 2) z3*=14.4
P3
P4
Infactible
x1≤ 4
x1 ≥ 5
x5*=(4, 2) z5*=14
P5
Sol. p. original
P6
x6*=(5, 1.43) z6*=14.29
1ª cota
z = 14
x2≤ 1
x2 ≥ 2
x7*=(5.6, 1) z7*=14.2
P7
P8
Infactible
x1≤ 5
x1 ≥ 6
x9*=(5, 1) z9*=13
P9
P10
x10*=(6, 0.71) z10*=14.14
No actualizamos la cota
Sol. p. original



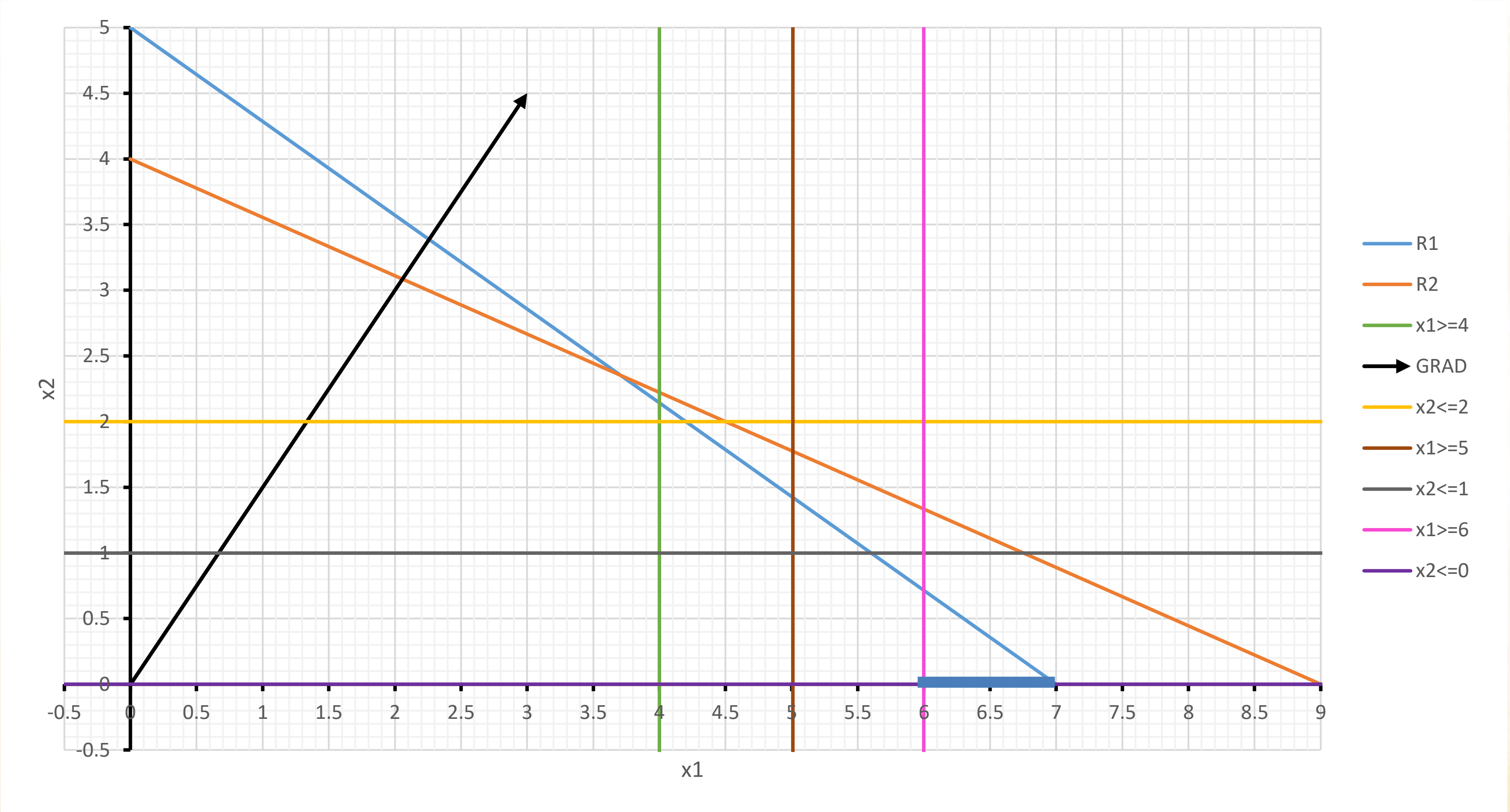
P_0
$x_0^*=(3.71, 2.4)$ $z_0^*=14.47$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
P_1
$x_1^*=(3, 2.67)$ $z_1^*=14$
Comp. 1ª cota
P_2
$x_2^*=(4, 2.14)$ $z_2^*=14.43$
$x_2 \leq 2$
$x_2 \geq 3$
P_3
$x_3^*=(4.19, 2)$ $z_3^*=14.4$
P_4
Infactible
$x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 5$
P_5
$x_5^*=(4, 2)$ $z_5^*=14$
Sol. p. original
P_6
$x_6^*=(5, 1.43)$ $z_6^*=14.29$
1ª cota
z = 14
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
P_7
$x_7^*=(5.6, 1)$ $z_7^*=14.2$
P_8
Infactible
$x_1 \leq 5$
$x_1 \geq 6$
P_9
$x_9^*=(5, 1)$ $z_9^*=13$
Sol. p. original
P_{10}
$x_{10}^*=(6, 0.71)$ $z_{10}^*=14.14$
No actualizamos la cota
$x_2 \leq 0$
$x_2 \geq 1$
P_{11}
P_{12}

$$P_{11} = P_{10} + \{ x_2 \leq 0 \}$$



UNIVERSITAS Miguel Hernández

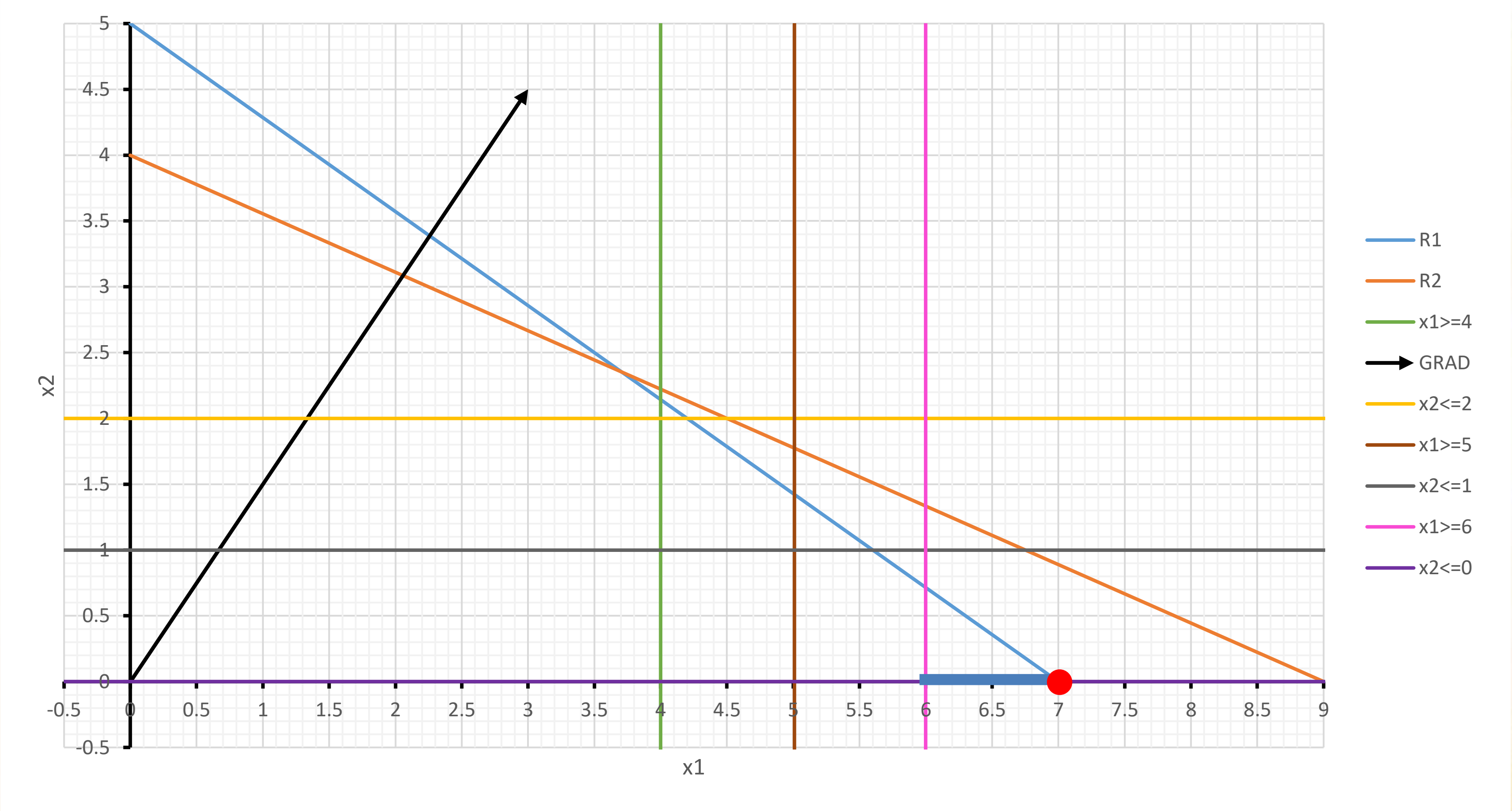
P_{11}



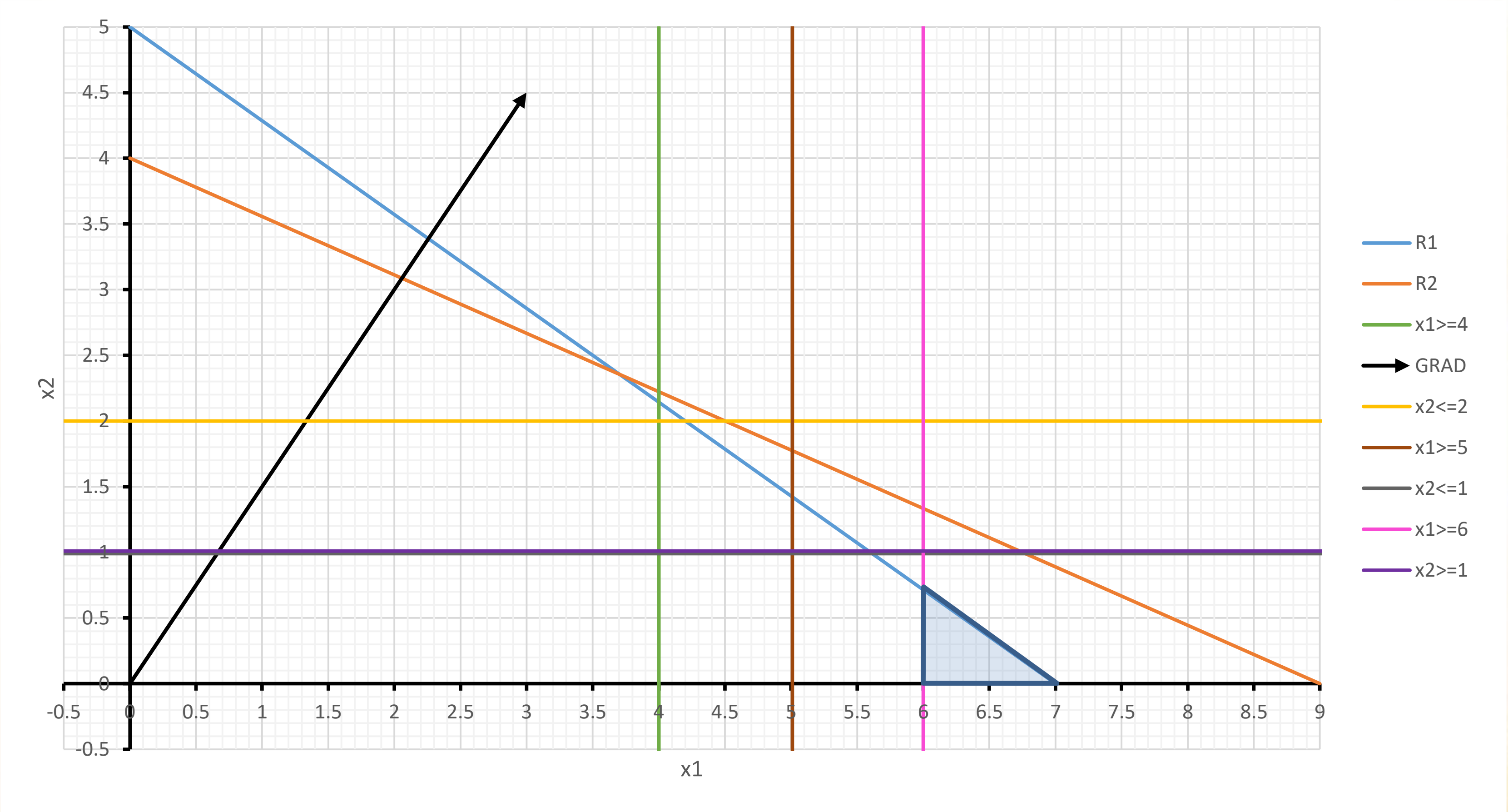
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
x2
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
x1
R1
R2
x1>=4
GRAD
x2<=2
x1>=5
x2<=1
x1>=6
x2<=0

P_{11}

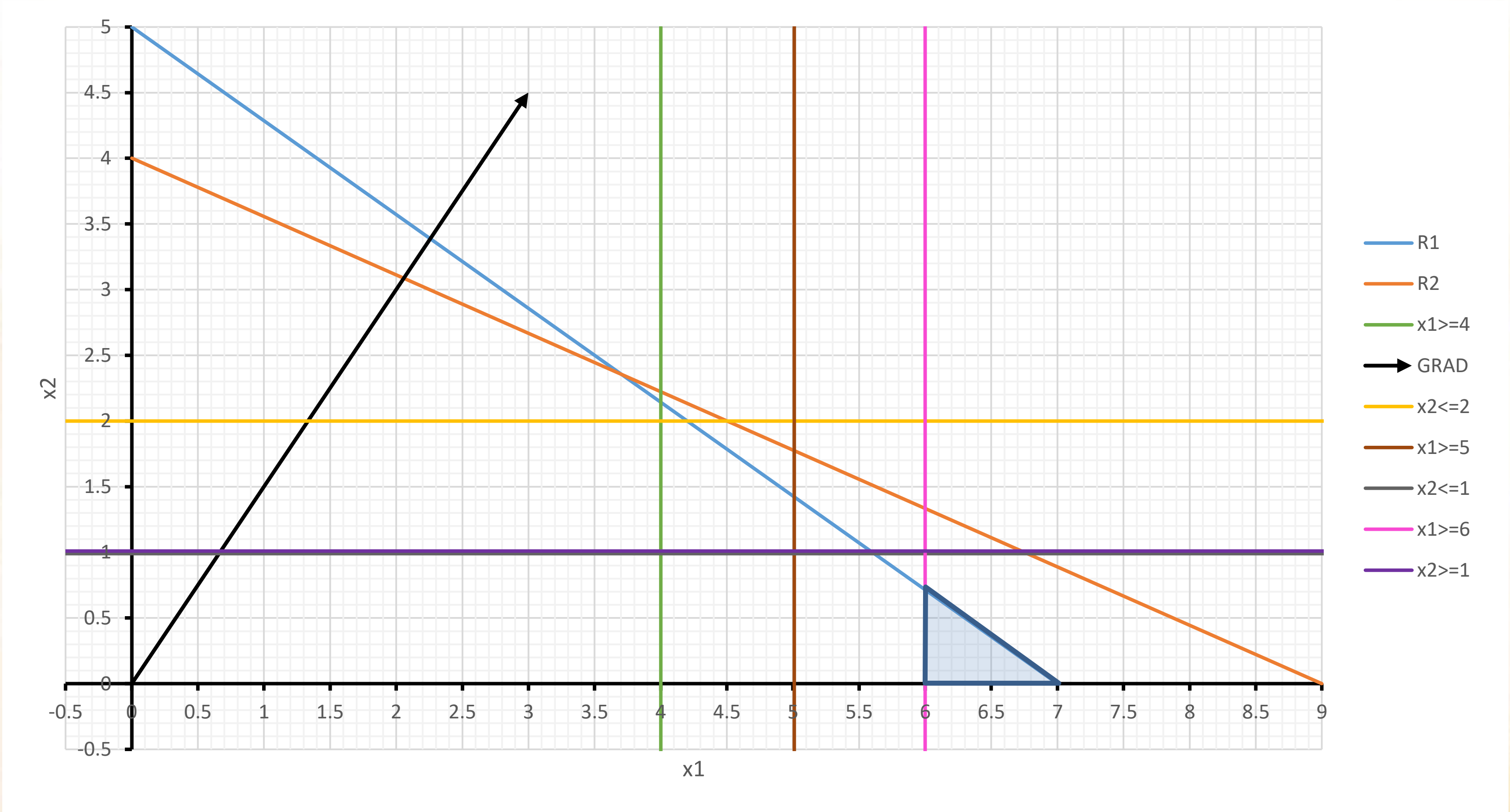
$x_{11}^*=(7,\ 0)\ \ z_{11}^*=14$

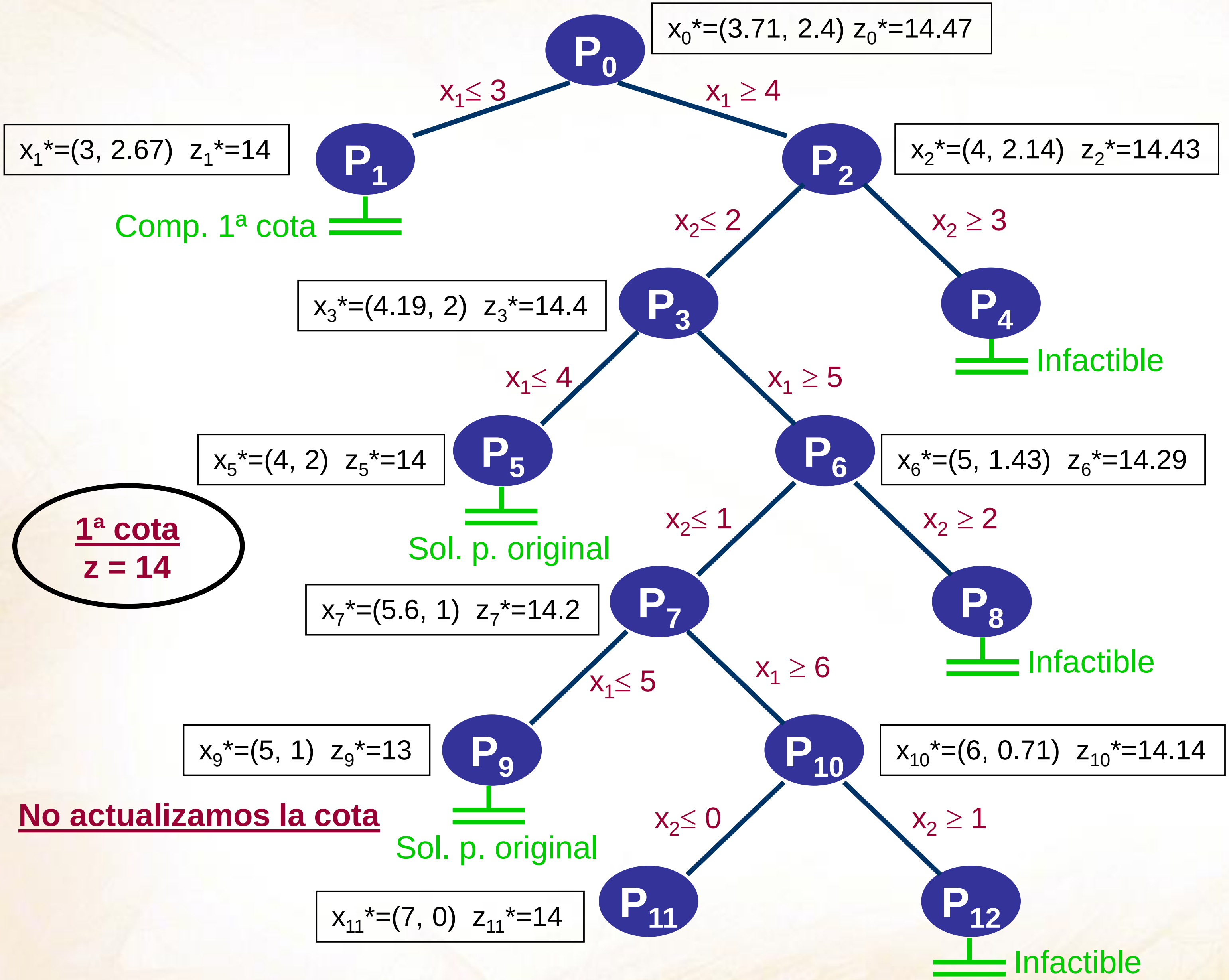


$$P_{12} = P_{10} + \{ x_2 \geq 1 \}$$

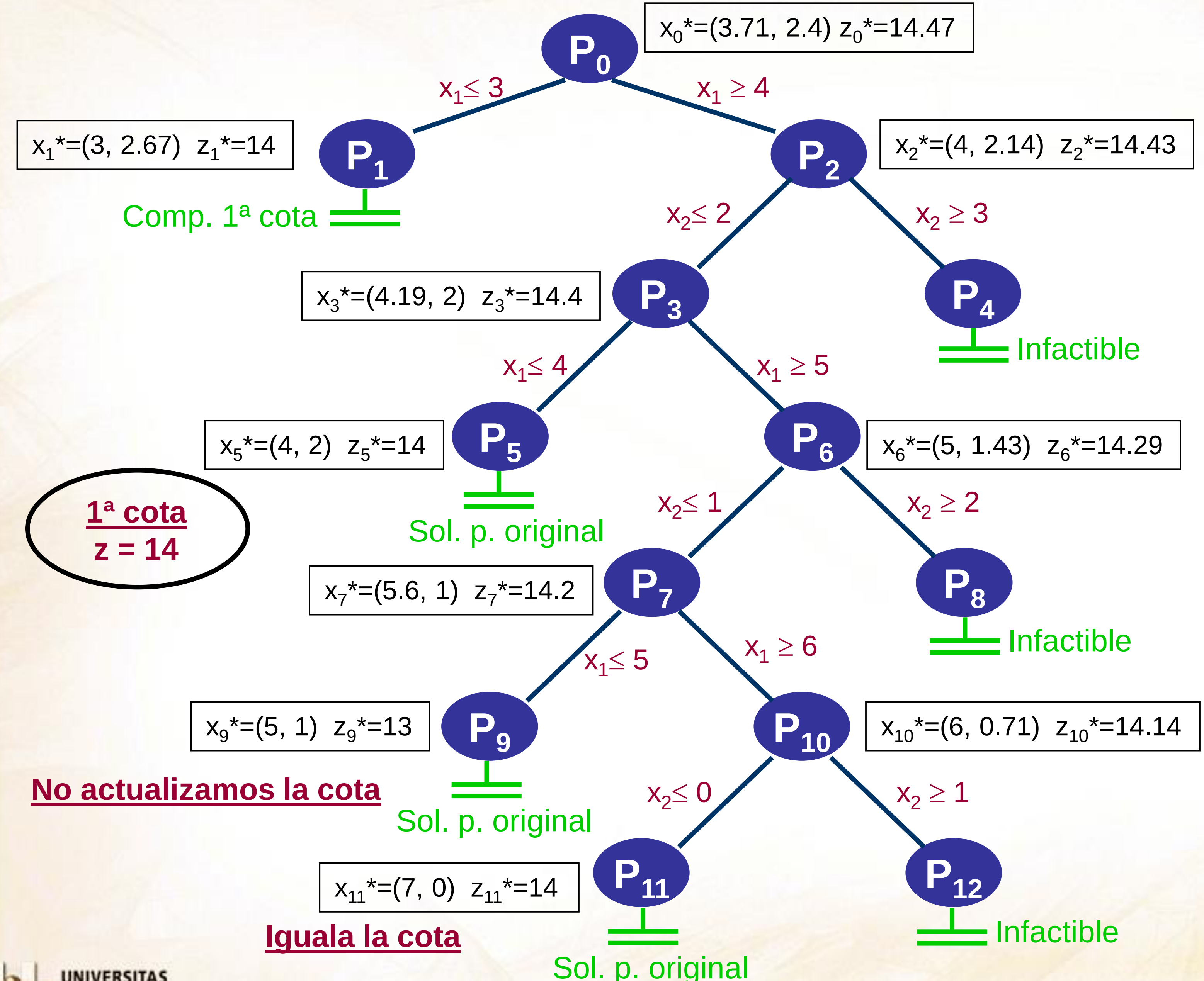


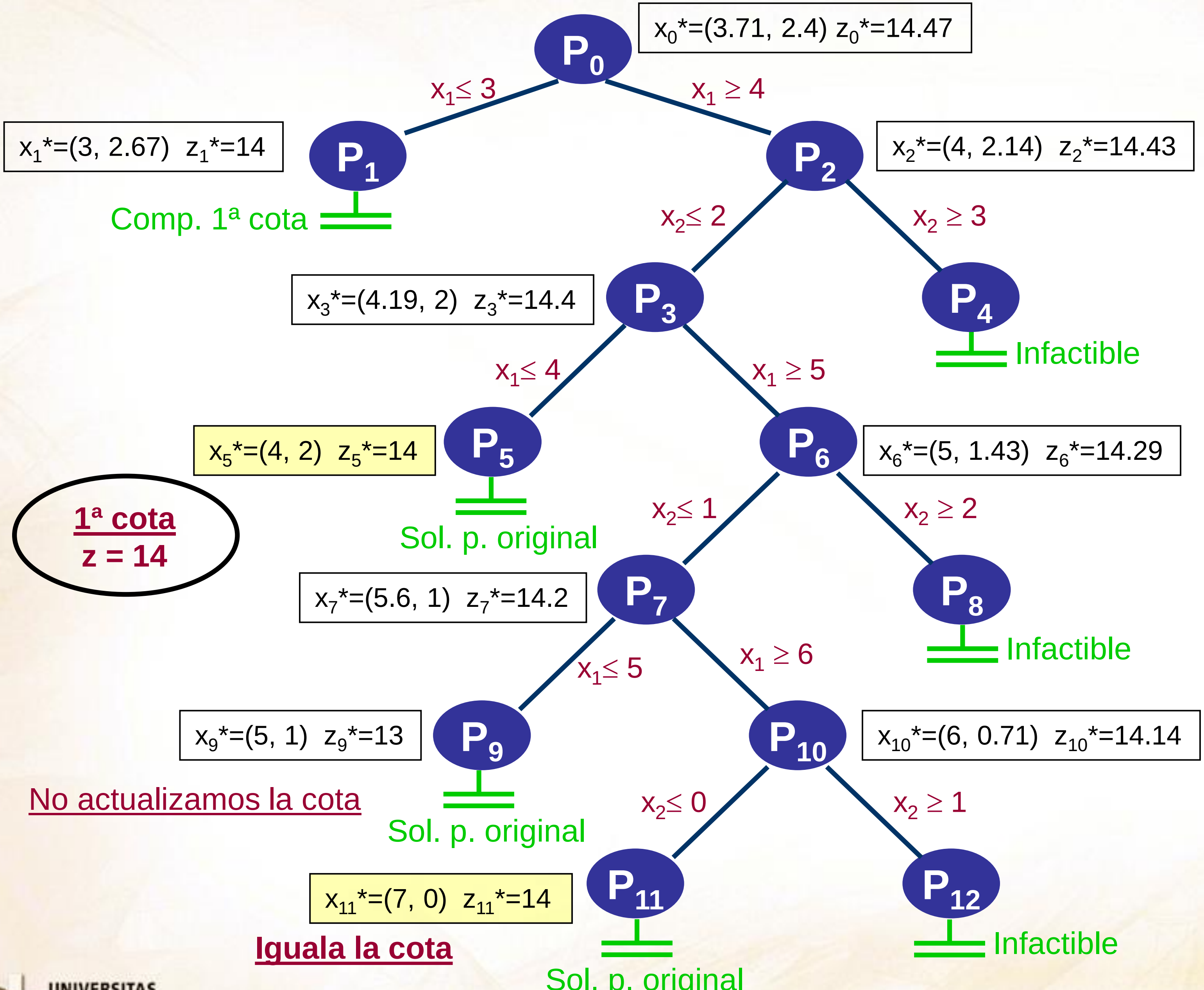
P_{12} Infactible





$x_0^*=(3.71, 2.4)$ $z_0^*=14.47$
P_0
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
$x_1^*=(3, 2.67)$ $z_1^*=14$
P_1
Comp. 1ª cota
P_2
$x_2^*=(4, 2.14)$ $z_2^*=14.43$
$x_2 \leq 2$
$x_2 \geq 3$
$x_3^*=(4.19, 2)$ $z_3^*=14.4$
P_3
P_4
Infactible
$x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 5$
$x_5^*=(4, 2)$ $z_5^*=14$
P_5
P_6
$x_6^*=(5, 1.43)$ $z_6^*=14.29$
1ª cota
z = 14
Sol. p. original
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$x_7^*=(5.6, 1)$ $z_7^*=14.2$
P_7
P_8
Infactible
$x_1 \leq 5$
$x_1 \geq 6$
$x_9^*=(5, 1)$ $z_9^*=13$
P_9
P_{10}
$x_{10}^*=(6, 0.71)$ $z_{10}^*=14.14$
No actualizamos la cota
Sol. p. original
$x_2 \leq 0$
$x_2 \geq 1$
$x_{11}^*=(7, 0)$ $z_{11}^*=14$
P_{11}
P_{12}
Infactible


P0
x0*=(3.71, 2.4) z0*=14.47
x1≤ 3
x1 ≥ 4
P1
x1*=(3, 2.67) z1*=14
Comp. 1ª cota
P2
x2*=(4, 2.14) z2*=14.43
x2≤ 2
x2 ≥ 3
P3
x3*=(4.19, 2) z3*=14.4
P4
Infactible
x1≤ 4
x1 ≥ 5
P5
x5*=(4, 2) z5*=14
Sol. p. original
P6
x6*=(5, 1.43) z6*=14.29
1ª cota
z = 14
x2≤ 1
x2 ≥ 2
P7
x7*=(5.6, 1) z7*=14.2
P8
Infactible
x1≤ 5
x1 ≥ 6
P9
x9*=(5, 1) z9*=13
Sol. p. original
No actualizamos la cota
P10
x10*=(6, 0.71) z10*=14.14
x2≤ 0
x2 ≥ 1
P11
x11*=(7, 0) z11*=14
Iguala la cota
Sol. p. original
P12
Infactible



UNIVERSITAS Miguel Hernández

EJEMPLO:

$$\left.\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ s.a: & 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\ & 4x_1 + 9x_2 \le 36 \\ & x_1,\, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Problema Original

SOLUCIÓN:

x*=(4, 2) z*= 14

x*=(7, 0) z*= 14

MOCHILA: son problemas en los que se tiene que elegir entre una serie de objetos que tienen un valor y ocupan un espacio (o tienen un peso), para introducir en una mochila (contenedor) de tal modo que el valor agregado o total sea máximo y el volumen o espacio que ocupen no exceda de un cierto límite, dado por la capacidad de la mochila o el contenedor.

Una compañía de transporte está considerando el transporte de una serie de objetos. Hay diez objetos posibles a transportar, cuyos valores para la empresa son 7, 2, 5, 4, 9, 3, 9, 6, 8 y 8, respectivamente. Y el volumen que ocupa cada uno de ellos es 9, 4, 3, 7, 5, 7, 6, 10, 8 y 4, respectivamente. Si la capacidad máxima del contenedor es 40, ¿cuál debería ser la selección de objetos para maximizar el valor agregado transportado en el contenedor?

Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se elige el objeto } i \\ 0 & \text{si no se elige el objeto } i \end{cases} \qquad i = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$$

Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se elige el objeto } i \\ 0 & \text{si no se elige el objeto } i \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

Función objetivo: $7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 3x_6 + 9x_7 + 6x_8 + 8x_9 + 8x_{10}$

Orientación de la optimización: maximizar

Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se elige el objeto } i \\ 0 & \text{si no se elige el objeto } i \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

Función objetivo: $7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 3x_6 + 9x_7 + 6x_8 + 8x_9 + 8x_{10}$

Orientación de la optimización: maximizar

Restricciones:

Volumen: $9x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 7x_6 + 6x_7 + 10x_8 + 8x_9 + 4x_{10} \leq 40$

Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se elige el objeto } i \\ 0 & \text{si no se elige el objeto } i \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

Función objetivo: $7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 3x_6 + 9x_7 + 6x_8 + 8x_9 + 8x_{10}$

Orientación de la optimización: maximizar

Restricciones:

Volumen: $9x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 7x_6 + 6x_7 + 10x_8 + 8x_9 + 4x_{10} \leq 40$

Variables: $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

CUBRIMIENTO: son problemas en los que se tiene que cubrir determinada región o conjunto de puntos, por medio de la elección de una serie de puntos o zonas de un conjunto de puntos o zonas candidatos.

La empresa de comunicaciones *TelNetwork Ltd*. ha resultado adjudicataria de la implantación de una red de comunicaciones de banda ancha que debe prestar su servicio en una determinada ciudad. Tras un análisis previo se ha dividido la ciudad en 20 regiones o áreas distintas de tamaños similares. Para garantizar una mínima calidad de servicio, cada una de las áreas deberá ser atendida por al menos un hub. Asimismo, tras un análisis previo del problema, se ha encontrado que existen 10 ubicaciones posibles para los hubs, que entre todas ellas cubrirían todas las áreas en las que ha sido dividida la ciudad. Cada ubicación puede dar cobertura a un número diferente de áreas, que son las que se muestran en la tabla.

Algunos Problemas Notables

Ubicación	Regiones atendidas	Ubicación	Regiones atendidas
A	1,2,6	F	10,11,12,20
B	3,4,5,8	G	2,8,13,14,17,18
C	4,5,6,10,12	H	7,11,14,15,16
D	3,7,8,13	I	1,17,18,19
E	9,10	J	2,19,20

Se considera que la colocación de un hub conlleva un coste diferente para cada posible ubicación, que depende del número de áreas que podría atender, de las conexiones, mantenimiento, etc. Los costes son los siguientes: si el hub puede atender dos áreas 30000 euros, si puede atender 3 áreas 40000 euros, si puede atender 4 áreas 50000 euros, si el hub puede atender 5 áreas 80000 euros y, finalmente, si el hub pudiera atender 6 áreas 100000 euros. ¿Cuál es la elección de hubs que da cobertura a todas las regiones a menor coste?

Variables de decisión:

$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ = 1 si se elige la ubicación correspondiente; 0 en otro caso

Variables de decisión:
A, B, C, D, E, F, G, H, I, J = 1 si se elige la ubicación correspondiente; 0 en otro caso

Función objetivo: $4A + 5B + 8C + 5D + 3E + 5F + 10G + 8H + 5I + 4J$ ($\times 10000$)

Orientación de la optimización: minimizar

Variables de decisión:
$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ = 1 si se elige la ubicación correspondiente; 0 en otro caso

Función objetivo: $4A + 5B + 8C + 5D + 3E + 5F + 10G + 8H + 5I + 4J$ (×10000)

Orientación de la optimización: minimizar

Restricciones:

R01) $A+I \geq 1$	R08) $B+D+G \geq 1$	R15) $H \geq 1$
R02) $A+G+J \geq 1$	R09) $E \geq 1$	R16) $H \geq 1$
R03) $B+D \geq 1$	R10) $C+E+F \geq 1$	R17) $G+I \geq 1$
R04) $B+C \geq 1$	R11) $F+H \geq 1$	R18) $G+I \geq 1$
R05) $B+C \geq 1$	R12) $C+F \geq 1$	R19) $I+J \geq 1$
R06) $A+C \geq 1$	R13) $D+G \geq 1$	R20) $F+J \geq 1$
R07) $D+H \geq 1$	R14) $G+H \geq 1$	

Variables de decisión:

A, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J* = 1 si se elige la ubicación correspondiente; 0 en otro caso

Función objetivo: $4A + 5B + 8C + 5D + 3E + 5F + 10G + 8H + 5I + 4J$ (×10000)

Orientación de la optimización: minimizar

Restricciones:

R01) $A + I \geq 1$	R08) $B + D + G \geq 1$	R15) $H \geq 1$
R02) $A + G + J \geq 1$	R09) $E \geq 1$	R16) $H \geq 1$
R03) $B + D \geq 1$	R10) $C + E + F \geq 1$	R17) $G + I \geq 1$
R04) $B + C \geq 1$	R11) $F + H \geq 1$	R18) $G + I \geq 1$
R05) $B + C \geq 1$	R12) $C + F \geq 1$	R19) $I + J \geq 1$
R06) $A + C \geq 1$	R13) $D + G \geq 1$	R20) $F + J \geq 1$
R07) $D + H \geq 1$	R14) $G + H \geq 1$	

Variables : $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \{0,1\}$

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

Las variables binarias suelen responder a la Modelización de decisiones Sí o No:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si la decision } j \text{ es SÍ} \\ 0 & \text{si la decision } j \text{ es NO} \end{cases}$$

El empleo de variables binarias nos permite modelizar:

- Implicaciones
- Expresiones lógicas (restricciones disyuntivas y restricciones condicionales),
- Activación de variables
- Costes fijos
- Etc.

Las condiciones anteriores se deben formular como una pregunta cuya respuesta debe ser Sí o No y se incorporan al modelo mediante variables auxiliares de tipo binario que representen dichas decisiones. (Las variables auxiliares que añadamos las representaremos habitualmente como y_j, para distinguirlas de las variables originales del problema x_j).

1) Coste fijo: En la práctica es bastante habitual incurrir en un cargo de preparación o coste fijo cuando se emprende una actividad. Si esto es así, el costo de la actividad *j* se puede representar de la forma:

$$f_j(x_j) = \begin{cases} k + c_j x_j & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad \text{donde} \qquad \begin{aligned} k &= \text{ costo fijo (matrícula, contrato....)} \\ c_j &= \text{ costo por cada unidad de } x_j \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\min \quad ky_j + c_j x_j + \ldots. \\ &\quad \text{donde } \; y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \min & ky_j + c_j x_j + \ldots. \\ s.a: & x_j \le \mathrm{M} y_j \\ & \vdots \end{cases}$$

con M una cota superior para x_j

$$x_j > 0 \to y_j = 1 \quad \text{y} \quad x_j = 0 \to \begin{cases} y_j = 0 \\ y_j = 1 \text{ descartado en el óptimo ya que min } ky_j \end{cases}$$

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

Ejemplo: En telefonía móvil se paga 0.15 € por establecimiento de llamada y 0.11 € por minuto de duración

x = duración de la llamada (minutos)

$$f(x)=\begin{cases}0.15+0.11x & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

$$\boxed{y=\begin{cases}1 & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}}$$

Ejemplo: En telefonía móvil se paga 0.15 € por establecimiento de llamada y 0.11 € por minuto de duración

x = duración de la llamada (minutos)

$$f(x) = \begin{cases} 0.15 + 0.11x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{y = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} \min & 0.15y + 0.11x + \ldots. \\ s.a: & x \le \mathrm{M}y \\ & \vdots \\ & x \ge 0, y \in \{0,1\} \end{cases}}$$

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

Ejemplo: En telefonía móvil se paga 0.15 € por establecimiento de llamada y 0.11 € por minuto de duración

x = duración de la llamada (minutos)

$$f(x) = \begin{cases} 0.15 + 0.11x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min & 0.15y + 0.11x + \dots. \\ s.a: & x \leq \text{M}y \\ & \vdots \\ & x \geq 0, y \in \{0,1\} \end{cases}$$

M = 60×24 = 1440

PRODUCCIÓN DE BIENES INDIVISIBLES CON COSTES FIJOS

Una determinada empresa dispone de tres líneas de producción en las que desarrolla la producción de un único producto.

La línea 1 tiene una capacidad productiva de 10000 unidades año, la línea 2 de 15000 unidades año y la 3 de 12000.

El coste por unidad producida en cada una de las líneas es, respectivamente, de 8 euros/unidad, 6 euros/unidad y 7 euros/unidad.

La previsión de demanda del producto es de 21000 unidades/año.

¿Cuál es la decisión que minimiza el coste?

Variables de decisión:
x_1 = producción en L1, x_2 = producción en L2, x_3 = producción en L3

Función objetivo: $8x_1 + 6x_2 + 7x_3$

Orientación de la optimización: minimizar

Restricciones:
Producción en L1: $x_1 \leq 10000$
Producción en L2: $x_2 \leq 15000$
Producción en L3: $x_3 \leq 12000$
Demanda: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 21000$

Variables: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Z}_+$

PRODUCCIÓN DE BIENES INDIVISIBLES CON COSTES FIJOS

Una determinada empresa dispone de tres líneas de producción en las que desarrolla la producción de un único producto. Debido a la coyuntura económica se está planteando el cierre de alguna de ellas para reducir costes de producción.

La línea 1 tiene una capacidad productiva de 10000 unidades año, la línea 2 de 15000 unidades año y la 3 de 12000.

El coste por unidad producida en cada una de las líneas es, respectivamente, de 8 euros/unidad, 6 euros/unidad y 7 euros/unidad.

Además, el coste fijo de mantener las líneas de producción activas es de 90000 euros la línea 1, 120000 euros la línea 2 y 110000 euros la línea 3.

La previsión de demanda del producto es de 21000 unidades/año.

¿Cuál es la decisión que minimiza el coste?

Variables de decisión:

y_1 = Línea 1 activa, y_2 = Línea 2 activa, y_3 = Línea 3 activa

x_1 = producción en L1, x_2 = producción en L2, x_3 = producción en L3

Variables de decisión:

y_1 = Línea 1 activa, y_2 = Línea 2 activa, y_3 = Línea 3 activa

x_1 = producción en L1, x_2 = producción en L2, x_3 = producción en L3

Función objetivo: $90000y_1 + 120000y_2 + 110000y_3 + 8x_1 + 6x_2 + 7x_3$

Orientación de la optimización: minimizar

Variables de decisión:

y_1 = Línea 1 activa, y_2 = Línea 2 activa, y_3 = Línea 3 activa

x_1 = producción en L1, x_2 = producción en L2, x_3 = producción en L3

Función objetivo: $90000y_1 + 120000y_2 + 110000y_3 + 8x_1 + 6x_2 + 7x_3$

Orientación de la optimización: minimizar

Restricciones:

Producción en L1: $x_1 \leq \mathbf{M1}y_1$ (desactivar línea 1)

Producción en L2: $x_2 \leq \mathbf{M2}y_2$ (desactivar línea 2)

Producción en L3: $x_3 \leq \mathbf{M3}y_3$ (desactivar línea 3)

Demanda: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 21000$

Variables de decisión:

y_1 = Línea 1 activa, y_2 = Línea 2 activa, y_3 = Línea 3 activa

x_1 = producción en L1, x_2 = producción en L2, x_3 = producción en L3

Función objetivo: $90000y_1 + 120000y_2 + 110000y_3 + 8x_1 + 6x_2 + 7x_3$

Orientación de la optimización: minimizar

Restricciones:

Producción en L1: $x_1 \leq 10000y_1$ (desactivar línea 1)

Producción en L2: $x_2 \leq 15000y_2$ (desactivar línea 2)

Producción en L3: $x_3 \leq 12000y_3$ (desactivar línea 3)

Demanda: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 21000$

Variables de decisión:
y_1 = Línea 1 activa, y_2 = Línea 2 activa, y_3 = Línea 3 activa
x_1 = producción en L1, x_2 = producción en L2, x_3 = producción en L3

Función objetivo: $90000y_1 + 120000y_2 + 110000y_3 + 8x_1 + 6x_2 + 7x_3$

Orientación de la optimización: minimizar

Restricciones:
Producción en L1: $x_1 - 10000y_1 \leq 0$ (desactivar línea 1)
Producción en L2: $x_2 - 15000y_2 \leq 0$ (desactivar línea 2)
Producción en L3: $x_3 - 12000y_3 \leq 0$ (desactivar línea 3)
Demanda: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 21000$

Variables: $y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$; $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Z}_+$

2) Activación de una v. continua: Para distinguir si una v. continua toma o no un valor no nulo, desearíamos disponer de una v. binaria:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases}$$

La condición anterior $x_j \leq \mathrm{M}y_j$ asegura que $x_j > 0 \rightarrow y_j = 1$, pero $x_j = 0 \rightarrow y_j = 0$ sólo se garantiza en el óptimo si y_j aparece en el objetivo e interesa minimizar su valor. No obstante, en la práctica, cuando una variable continua x_j toma un valor positivo, suele tomar un valor mínimo L_j (Si se realiza una llamada, se contabiliza al menos un minuto; si se produce algo, se produce al menos tantos grms...). En este caso se ha de satisfacer $y_j = 1 \rightarrow x_j \geq L_j$, que se consigue con la restricción adicional $L_j y_j \leq x_j$.

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

En general, si en un proceso la unidad *j* está activa, su uso ha de estar entre las cotas $L_j \leq x_j \leq U_j$:

$$\boxed{L_j y_j \leq x_j \leq U_j y_j, \quad y_j \in \{0,1\}}$$

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

En general, si en un proceso la unidad *j* está activa, su uso ha de estar entre las cotas $L_j \leq x_j \leq U_j$:

$$\boxed{L_j y_j \leq x_j \leq U_j y_j, \quad y_j \in \{0,1\}}$$

$x_j > 0 \rightarrow y_j = 1$, ya que necesariamente $x_j \leq U_j \quad \rightarrow \quad \boxed{L_j \leq x_j \leq U_j}$

UNIVERSITAS Miguel Hernández

En general, si en un proceso la unidad *j* está activa, su uso ha de estar entre las cotas $L_j \leq x_j \leq U_j$:

$$\boxed{L_j y_j \leq x_j \leq U_j y_j, \quad y_j \in \{0,1\}}$$

$x_j > 0 \rightarrow y_j = 1$, ya que necesariamente $x_j \leq U_j \quad \rightarrow \quad \boxed{L_j \leq x_j \leq U_j}$

$x_j = 0 \rightarrow y_j = 0$, ya que necesariamente $0 \times L_j = 0 \leq x_j = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{0 \leq x_j = 0 \leq 0}$

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

3) Implicaciones entre variables binarias: Cuando un valor concreto de una variable binaria condiciona el valor que han de tomar otras variables binarias.

- ✓ La condición $y_i = 0 \Rightarrow y_j = 0$ es equivalente a $y_j \leq y_i$
- ✓ La condición $y_i = 0 \Rightarrow y_j = 1$ es equivalente a $y_j \geq 1 - y_i$
- ✓ La condición $y_i = 1 \Rightarrow y_j = 0$ es equivalente a $y_j \leq 1 - y_i$
- ✓ La condición $y_i = 1 \Rightarrow y_j = 1$ es equivalente a $y_j \geq y_i$

PROBLEMAS DE MEZCLAS

Una empresa elabora un cierto alimento refinando diferentes tipos de aceite y mezclándolos. Los tipos de aceite se clasifican en dos categorías: vegetales (VEG1 y VEG2) y no vegetales (OIL1, OIL2 y OIL3). Dependiendo del tipo de aceite, vegetal o no vegetal, se requieren diferentes líneas de producción para el refino del aceite. Así, en un mes, la máxima cantidad de cada uno de ellos que puede refinarse es de 200 toneladas de aceite vegetal y 250 de no vegetal. Se puede asumir que el coste de refino es nulo y que durante el proceso no se producen pérdidas de peso. Por otro lado, existen restricciones tecnológicas que imponen cotas (inferior y superior) a la dureza del producto final, de 3 y 6 unidades respectivamente. Se puede asumir que la dureza se mezcla linealmente; la dureza (por tonelada) de cada uno de los aceites, así como su coste (por tonelada) de producción, son los que aparecen en la siguiente tabla:

	VEG1	VEG2	OIL1	OIL2	OIL3
Coste	110	120	130	110	115
Dureza	8.8	6.1	2.0	4.2	5.0

Cada tonelada de producto final se vende a un precio de 150 u.m.

Plantear el problema de programación lineal continua al que se enfrenta la empresa para determinar cómo ha de hacer su producción de manera que obtenga el mayor beneficio neto posible.

Variables de decisión:
x_j = cantidad de aceite de tipo j, j = V1, V2, O1, O2, O3, que contiene la mezcla

Función objetivo: $150(x_{V1} + x_{V2} + x_{O1} + x_{O2} + x_{O3}) - (110x_{V1} + 120x_{V2} + 130x_{O1} + 110x_{O2} + 115x_{O3})$

Orientación de la optimización: maximizar

Restricciones:

Refinado: $x_{V1} + x_{V2} \leq 200$

$x_{O1} + x_{O2} + x_{O3} \leq 250$

Dureza: $3(x_{V1} + x_{V2} + x_{O1} + x_{O2} + x_{O3}) \leq 8.8x_{V1} + 6.1x_{V2} + 2x_{O1} + 4.2x_{O2} + 5x_{O3}$

$8.8x_{V1} + 6.1x_{V2} + 2x_{O1} + 4.2x_{O2} + 5x_{O3} \leq 6(x_{V1} + x_{V2} + x_{O1} + x_{O2} + x_{O3})$

Variables: $x_{V1}, x_{V2}, x_{O1}, x_{O2}, x_{O3} \geq 0$

PROBLEMAS DE MEZCLAS CON CONDICIONES LÓGICAS

¿Cómo imponer las siguientes condiciones adicionales al problema?

- Si el producto final contiene un cierto tipo de aceite, debe contener al menos 20 toneladas del mismo.

- El producto final no puede contener más de tres tipos de aceite diferentes.

- Si la mezcla contiene algún tipo de aceite vegetal (VEG1 o VEG2), entonces también debe contener aceite no vegetal de tipo 3 (OIL3).

Se deben incluir variables enteras en el modelo que nos permitan añadir condiciones lógicas: activación-desactivación de variables continuas

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- Si el producto final contiene un cierto tipo de aceite, debe contener al menos 20 toneladas del mismo

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- Si el producto final contiene un cierto tipo de aceite, debe contener al menos 20 toneladas del mismo $\rightarrow$ Activación de variables continuas

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- Si el producto final contiene un cierto tipo de aceite, debe contener al menos 20 toneladas del mismo $\rightarrow$ Activación de variables continuas

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2, OIL1, OIL2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O1, O2, O3}$$

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- Si el producto final contiene un cierto tipo de aceite, debe contener al menos 20 toneladas del mismo $\rightarrow$ Activación de variables continuas

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2, OIL1, OIL2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O1, O2, O3}$$

Añadir las restricciones:

Para la producción máxima de cada aceite: $x_j \leq \mathbf{U_j}\, y_j$, j = V1, V2, O1, O2, O3

Para la producción mínima de cada aceite: $\mathbf{L_j}\, y_j \leq x_j$, j = V1, V2, O1, O2, O3

Variables: $y_1 \in \{0, 1\}$, j = V1, V2, O1, O2, O3

UNIVERSITAS Miguel Hernández

- Si el producto final contiene un cierto tipo de aceite, debe contener al menos 20 toneladas del mismo $\rightarrow$ Activación de variables continuas

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2, OIL1, OIL2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O1, O2, O3}$$

Añadir las restricciones:

Para la producción máxima de cada aceite: $x_j \leq 200 y_j$, j = V1, V2
$x_j \leq 250 y_j$, j = O1, O2, O3

Para la producción mínima de cada aceite: $20 y_j \leq x_j$, j = V1, V2, O1, O2, O3

Variables: $y_1 \in \{0, 1\}$, j = V1, V2, O1, O2, O3

UNIVERSITAS Miguel Hernández

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- El producto final no puede contener más de tres tipos de aceite diferentes

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- El producto final no puede contener más de tres tipos de aceite diferentes → Activación de variables continuas + implicaciones

UNIVERSITAS Miguel Hernández

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- El producto final no puede contener más de tres tipos de aceite diferentes $\rightarrow$ Activación de variables continuas + implicaciones

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2, OIL1, OIL2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O1, O2, O3}$$

Añadir las restricciones:

Para activar las variables: $x_j \leq 200 y_j$, j = V1, V2

$x_j \leq 250 y_j$, j = O1, O2, O3

Variables: $y_j \in \{0, 1\}$, j = V1, V2, O1, O2, O3

UNIVERSITAS Miguel Hernández

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- El producto final no puede contener más de tres tipos de aceite diferentes $\rightarrow$ Activación de variables continuas + implicaciones

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2, OIL1, OIL2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O1, O2, O3}$$

Añadir las restricciones:

Para activar las variables: $x_j \leq 200 y_j$, j = V1, V2

$x_j \leq 250 y_j$, j = O1, O2, O3

No más de 3 tipos de aceite:

Variables: $y_j \in \{0, 1\}$, j = V1, V2, O1, O2, O3

UNIVERSITAS Miguel Hernández

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- El producto final no puede contener más de tres tipos de aceite diferentes $\rightarrow$ Activación de variables continuas + implicaciones

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2, OIL1, OIL2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O1, O2, O3}$$

Añadir las restricciones:

Para activar las variables: $x_j \leq 200 y_j, \; j = \text{V1, V2}$

$x_j \leq 250 y_j, \; j = \text{O1, O2, O3}$

No más de 3 tipos de aceite: $y_{\text{V1}} + y_{\text{V2}} + y_{\text{O1}} + y_{\text{O2}} + y_{\text{O3}} \leq 3$

Variables: $y_j \in \{0, 1\}, j = \text{V1, V2, O1, O2, O3}$

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- El producto final no puede contener más de tres tipos de aceite diferentes $\rightarrow$ Activación de variables continuas + implicaciones

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2, OIL1, OIL2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O1, O2, O3}$$

Añadir las restricciones:

Para activar las variables: $x_j \leq 200 y_j$, j = V1, V2

$x_j \leq 250 y_j$, j = O1, O2, O3

No son necesarias las restricciones $L_j y_j \leq x_j$

No más de 3 tipos de aceite: $y_{V1} + y_{V2} + y_{O1} + y_{O2} + y_{O3} \leq 3$

Variables: $y_j \in \{0, 1\}$, j = V1, V2, O1, O2, O3

UNIVERSITAS Miguel Hernández

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- Si la mezcla contiene algún tipo de aceite vegetal (VEG1 o VEG2), entonces también debe contener aceite no vegetal de tipo 3 (OIL3)

UNIVERSITAS Miguel Hernández

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- Si la mezcla contiene algún tipo de aceite vegetal (VEG1 o VEG2), entonces también debe contener aceite no vegetal de tipo 3 (OIL3) → Activación de variables continuas + implicaciones

UNIVERSITAS Miguel Hernández

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- Si la mezcla contiene algún tipo de aceite vegetal (VEG1 o VEG2), entonces también debe contener aceite no vegetal de tipo 3 (OIL3) → Activación de variables continuas + implicaciones

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O3}$$

Añadir las restricciones:

Para activar las variables: $x_j \leq 200 y_j, \; j = \text{V1, V2}$

$$x_{\text{O3}} \leq 250 y_{\text{O3}}$$

Variables: $y_j \in \{0, 1\}, j = \text{V1, V2, O3}$

UNIVERSITAS Miguel Hernández

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- Si la mezcla contiene algún tipo de aceite vegetal (VEG1 o VEG2), entonces también debe contener aceite no vegetal de tipo 3 (OIL3) $\rightarrow$ Activación de variables continuas + implicaciones

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O3}$$

Añadir las restricciones:

Para activar las variables: $x_j \leq 200 y_j$, j = V1, V2

$x_{O3} \leq 250 y_{O3}$

Si $x_{V1} > 0$ o $x_{V2} > 0 \rightarrow x_{O3} > 0$:

Variables: $y_j \in \{0, 1\}$, j = V1, V2, O3

Uso de variables binarias en la formulación de modelos

- Si la mezcla contiene algún tipo de aceite vegetal (VEG1 o VEG2), entonces también debe contener aceite no vegetal de tipo 3 (OIL3) $\rightarrow$ Activación de variables continuas + implicaciones

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O3}$$

Añadir las restricciones:

Para activar las variables: $x_j \le 200 y_j, \ j = \text{V1, V2}$

$x_{O3} \le 250 y_{O3}$

Si $x_{V1} > 0$ o $x_{V2} > 0 \rightarrow x_{O3} > 0$: $y_{V1} \le y_{O3}$

$y_{V2} \le y_{O3}$

Variables: $y_j \in \{0, 1\}, j = \text{V1, V2, O3}$

UNIVERSITAS Miguel Hernández

- Si la mezcla contiene algún tipo de aceite vegetal (VEG1 o VEG2), entonces también debe contener aceite no vegetal de tipo 3 (OIL3) → Activación de variables continuas + implicaciones

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O3}$$

Añadir las restricciones:

Para activar las variables: $x_j \le 200 y_j$, j = V1, V2
$x_{O3} \le 250 y_{O3}$

Si $x_{V1} > 0$ o $x_{V2} > 0 \rightarrow x_{O3} > 0$: $y_{V1} \le y_{O3}$
$y_{V2} \le y_{O3}$

No son necesarias las restricciones $L_j y_j \le x_j$

Variables: $y_j \in \{0, 1\}$, j = V1, V2, O3

UNIVERSITAS Miguel Hernández

- Si la mezcla contiene algún tipo de aceite vegetal (VEG1 o VEG2), entonces también debe contener aceite no vegetal de tipo 3 (OIL3) → Activación de variables continuas + implicaciones

Añadir variables binarias y_j, que tomen los valores 1 o 0 dependiendo de si el aceite en cuestión (VEG1, VEG2 y OIL3) se utiliza o no:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases} \qquad j = \text{V1, V2, O3}$$

Añadir las restricciones:

Para activar las variables: $x_j \leq 200 y_j$, $j = \text{V1, V2}$

$x_{O3} \leq 250 y_{O3}$

Si $x_{V1} > 0$ o $x_{V2} > 0 \rightarrow x_{O3} > 0$: $y_{V1} \leq y_{O3}$, $y_{V2} \leq y_{O3}$ ↔ ***Alternativamente:*** $y_{V1} + y_{V2} \leq 2 y_{O3}$

Variables: $y_j \in \{0, 1\}$, $j = \text{V1, V2, O3}$

UNIVERSITAS Miguel Hernández